

## Πεπερασμένες ομάδες

Εαρινό 2013

Μ. Λουκάκη

1. Αν  $N \leq Z(G)$  και  $G/N$  είναι κυκλική τότε η  $G$  είναι αβελιανή. (Δείξτε πρώτα ότι  $N \trianglelefteq G$ ).
2. 1) Αν  $A, B$  αβελιανές υποομάδες της  $G$  τότε η  $A \cap B$  είναι κανονική υποομάδα της  $\langle A, B \rangle$ .  
2) Αν  $G$  μη κυκλική (πεπερασμένη) ομάδα τ.ω. κάθε γνήσια υποομάδα της είναι αβελιανή, τότε η  $G$  περιέχει γνήσια κανονική μη τετριμμένη υποομάδα  $N$ .
3. Αν  $H$  είναι subnormal υποομάδα της  $G$  τότε  $\Phi(H) \leq \Phi(G)$ .  
Αν  $N \trianglelefteq G$  και  $N \leq \Phi(G)$  τότε  $\Phi(G/N) = \Phi(G)/N$ .
4. 1) Αν  $C \trianglelefteq A$  και  $D \trianglelefteq B$  τότε  $(C \times D) \trianglelefteq (A \times B)$  και  $(A \times B)/(C \times D) \cong (A/C) \times (B/D)$ .  
2) Αν  $A$  είναι αβελιανή και  $D$  η διαγώνια υποομάδα  $D = \{(a, a) \mid a \in A\}$  της  $A \times A$  τότε η  $D$  είναι κανονική υποομάδα της  $A \times A$  και  $(A \times A)/D \cong A$ .  
3) Το 2) παραπάνω δεν ισχύει αν  $A$  δεν είναι αβελιανή. Δείτε ότι αν  $A = S_3$  τότε η διαγώνιος  $D$  δεν είναι κανονική υποομάδα της  $A \times A$ .