

Πεπερασμένες ομάδες

Εαρινό 2013

Μ. Λουκάκη

1. Η δράση της ομάδας G στο σύνολο X είναι transitive αν στο X υπάρχει μόνο μία τροχιά (orbit). (Ισοδύναμα για κάθε $a, b \in X$ υπάρχει $g \in G$ ώστε $a \cdot g = b$.) Έστω G ομάδα που δρα transitively στα σύνολα X, Ω . Δείξτε ότι η κανονικά επαγόμενη δράση της G στο $X \times \Omega$ είναι transitive αν και μόνο αν $G_a G_\omega = G$ για κάποια $a \in X$ και $\omega \in \Omega$.

2. Πόσα διαφορετικά κολιέ μπορώ να φτιάξω με r συμμετρικές χάντρες αν έχω στην διάθεσή μου n χρώματα; (Θεωρείστε ότι τα κολιέ δεν μπορούν να βγουν από το λαιμό σας (δηλαδή δεν έχω ανακλάσεις). Αν δυσκολεύεστε με το γενικό r δουλέψτε με $r = 20$.)

3. Έστω P μια p -Sylow υποομάδα της G και H υποομάδα με $N_G(P) \leq H \leq G$ δείξτε ότι $H = N_G(H)$. (Αυτό για $H = N_G(P)$ δίνει $N_G(N_G(P)) = N_G(P)$.)

Μία από τις επόμενες 2 (η 4η είναι ευκολότερη της 5ης).

4. Αν $|G| = pqr$ με p, q, r πρώτους δείξτε ότι η G δεν είναι απλή.

5. Αν $|G| = pqr$ με $p < q < r$ πρώτοι δείξτε ότι $|Syl_r(G)| = 1$.

Υποδ. Πρώτα δείξτε την εκδοχή με 2 πρώτους σαν λήμμα. Μετά δείξτε ότι αν η άσκηση δεν ισχύει τότε μια Sylow-υποομάδα είναι κανονική και κάντε χρήση του λήμματος που δείξατε.