

Πεπερασμένες ομάδες

Εαρινό 2013

Μ. Λουκάκη

Λύστε 2 από τις

1. Δείξτε ότι η G δεν είναι solvable αν και μόνο αν περιέχει υποομάδα N με $1 \leq N \leq G$ τέτοια ώστε $N' = N$.

2. Έστω G solvable και $M \leq G$ μια maximal υποομάδα της με $\text{core}(M) = 1$. Αν N είναι minimal κανονική υποομάδα της G δείξτε ότι:

1) $NM = G$ και $N \cap M = 1$.

2) $C_M(N) = 1$

3) $N = C_G(N)$

4) N είναι η μοναδική minimal κανονική υποομάδα της G .

3. Αν G πεπερασμένη solvable και μη-αβελιανή δείξτε ότι $F(G) > Z(G)$.

4. Έστω X, Y διαφορετικές υποομάδες μιας ομάδας G . Λέμε ότι X, Y είναι ιδιαίτερο ζευγάρι' αν $|X| = |Y|$ και καμία άλλη υποομάδα της G δεν έχει την ίδια τάξη με αυτή των X και Y .

1) Αν G ομάδα που έχει ένα ιδιαίτερο ζευγάρι' υποομάδων, δείξτε ότι κάποια υποομάδα της G έχει ένα ιδιαίτερο ζευγάρι' κανονικών υποομάδων.

2) Αν $G = A \times B$ είναι ευθύ γινόμενο solvable ομάδων δείξτε ότι οι υποομάδες $A \times 1$ και $1 \times B$ δεν μπορεί να είναι ιδιαίτερο ζευγάρι'.

3) Δείξτε ότι μία solvable ομάδα δεν περιέχει ιδιαίτερα ζευγάρια' υποομάδων.