

Γραμμική Άλγεβρα 1

Εαρινό 2013

Φυλλάδιο 2

Χρ. Κουρουνιώτης-Μ. Λουκάκη

1. 1) Φτιάξτε τον 2 επί 3 πίνακα  $A = (a_{i,j})$  όπου  $a_{i,j} = i + 2j$ .
- 2) Φτιάξτε τον 3 επί 3 πίνακα  $B = (b_{i,j})$  όπου  $b_{i,j} = i^2 + j^2$ .
- 3) Υπολογίστε το γινόμενο  $AB$ .

2. Αν  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , δείξτε ότι ένας 2 επί 2 πίνακας  $B$  μετατίθεται με τον  $A$  (δηλαδή ικανοποιεί  $AB = BA$ ) αν και μόνο αν  $B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$ , για κάποια  $a, b \in \mathbb{R}$ .

3. Αν  $A, B$  είναι 2 επί 2 πίνακες που τα αθροίσματα των στηλών τους είναι 1 δείξτε ότι και το άθροισμα των στηλών του  $AB$  είναι 1.

4. Σωστό ή Λάθος (δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας)

α) Αν η 1η και η 3η στήλη του  $B$  είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την 1η και 3η στήλη του  $AB$ .

β) Αν η 1η και η 3η γραμμή του  $B$  είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την 1η και 3η γραμμή του  $AB$ .

γ) Αν η 1η και η 3η γραμμή του  $A$  είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την 1η και 3η γραμμή του  $AB$ .

δ) Αν η 1η και η 3η στήλη του  $A$  είναι ίδιες, το ίδιο συμβαίνει και με την 1η και 3η στήλη του  $AB$ .

ε)  $(AB)^2 = A^2B^2$ .

ζ)  $(A + B)^2 = (A + B)(B + A) = A^2 + 2AB + B^2$ .

5. Βρείτε παραδείγματα πραγματικών  $2 \times 2$  πινάκων που να ικανοποιούν

1)  $A^2 = -I_2$ ,

2)  $B^2 = 0$  με  $B \neq 0$ ,

3)  $CD = -DC$  με  $CD \neq 0$ ,

4)  $EF = 0$  χωρίς κανένα στοιχείο των  $E, F$  να είναι 0.

6. Εφαρμόστε απαλοιφή για να βρείτε τους παράγοντες  $L$  και  $U$  των πινάκων

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

7. Λύστε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

αναλύοντάς την σε δύο τριγωνικές εξισώσεις,  $Lc = b$  και  $Ux = c$ .

8. Παραγοντοποιήστε τον πίνακα του παρακάτω συστήματος  $A$  ως γινόμενο  $LU$ , όπου  $L$  είναι κάτω τριγωνικός με 1 στην διαγώνιο, ενώ  $U$  είναι άνω τριγωνικός.

$$5x + y + 2z = 2$$

$$2x + y + z = 4$$

$$9x + 2y + 5z = 3.$$

Να λυθεί το σύστημα αφού λυθούν τα 2 επιμέρους συστήματα που προκύπτουν.

9. Βρείτε τις δυνάμεις  $A, A^2, A^3, \dots, A^n$  του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. Υπολογίστε τα γινόμενα  $FGH$  και  $HGF$  (έχουμε παραλείψει τα μηδενικά πάνω από τη διαγώνιο):

$$F = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 2 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$