

**Γραμμική Άλγεβρα 1**  
Ολοήμερο Εργαστήριο 4  
Ξ. Κουρουνιώτης– Μ. Λουκάκη

1. Να βρείτε παραμετρική διανυσματική λύση για το ομογενές:

$$\begin{array}{cccccc} x & -2y & -1z & -4w & = & 0 \\ 2x & -4y & +3z & +7w & = & 0 \\ -2x & +4y & +1z & +5w & = & 0 \end{array}$$

2. Ποια από τα επόμενα υποσύνολα  $\{b = (b_1, b_2, b_3), b_i \in \mathbf{R}\}$  του  $\mathbf{R}^3$  είναι πράγματι υπόχωροι;

- 1) Τα διανύσματα  $b$  που ικανοποιούν  $b_1 = 0$ .
- 2) Τα διανύσματα  $b$  που ικανοποιούν  $b_1 \geq 0$ .
- 3) Τα διανύσματα  $b$  που ικανοποιούν  $b_1 = 1$ .
- 4) Τα διανύσματα  $b$  με  $b_1 b_2 = 0$ .
- 5) Το μεμονωμένο διάνυσμα  $b = (0, 0, 0)$ .
- 6) Όλοι οι γραμμικοί συνδιασμοί των δύο διανυσμάτων  $x = (1, 1, 0), y = (2, 0, 1)$ .
- 7) Τα διανύσματα  $b$  που ικανοποιούν  $b_3 - b_2 + 3b_1 = 0$ .
- 8) Τα διανύσματα  $b$  που ικανοποιούν  $b_2 = b_1^2$ .
- 9) Τα διανύσματα  $b$  με  $b_2$  ρητό.

3. Ποιές από τις επόμενες περιγραφές είναι σωστές ; Οι λύσεις  $x$  του

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

σχηματίζουν επίπεδο, ευθεία, σημείο, υπόχωρο, μηδενόχωρο του  $A$ , χώρο στηλών του  $A$ .

4. Εξετάστε εάν τα ακόλουθα σωστά ή λάθος, δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας Δίνεται το  $m$  επί  $n$  σύστημα  $Ax = b$ .

- 1) Τα διανύσματα  $b$  που δεν περιέχονται στον χώρο  $R(A)$  αποτελούν γραμμικό υπόχωρο του  $R^m$ .
- 2) Εάν  $R(A)$  περιέχει μόνο το μηδενικό διάνυσμα, τότε ο  $A$  είναι ο μηδενικός πίνακας.
- 3) Ο χώρος στηλών του πίνακα  $2A$  είναι ίσος με τον χώρο στηλών του  $A$ .
- 4) Ο χώρος στηλών του πίνακα  $A - I$  είναι ίσος με τον χώρο στηλών του  $A$ .

5. 1) Κατασκευάστε έναν 3 επί 3 πίνακα του οποίου ο χώρος στηλών περιέχει τα διανύσματα  $(1, 1, 0)$  και  $(1, 0, 1)$  αλλά δεν περιέχει το  $(1, 1, 1)$ .

2) Κατασκευάστε έναν 3 επί 3 πίνακα του οποίου ο χώρος στηλών είναι μια ευθεία.

6. Ποια συνθήκη πρέπει να πληρούν τα  $b_1, b_2, b_3$ , ώστε το διάνυσμα  $(b_1, b_2, b_3)$  να ανήκει στο χώρο στηλών του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 4 & 9 & -8 \end{bmatrix}.$$

7. Δείξτε ότι ο χώρος στηλών του  $AB$  περιέχεται στον (ή είναι ίσος) χώρο στηλών του  $A$ . Δώστε παράδειγμα όπου οι χώροι στηλών του  $AB$  και  $A$  δεν είναι ίσοι.