

Γραμμική Άλγεβρα 1  
Εαρινό 2013  
Φυλλάδιο 5  
Χρ. Κουρουνιώτης-Μ. Λουκάκη

1. Βρείτε την  $LU$  παραγοντοποίηση σε κάτω τριγωνικό και πίνακα σε κλιμακωτή μορφή για τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ποιές είναι οι τάξεις των παραπάνω πινάκων;

2.1) Να βρεθούν οι συνθήκες που πρέπει να πληρούν τα  $b_1, b_2, b_3$  ώστε το διάνυσμα

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \text{ να ανήκει στο χώρο στηλών του πίνακα } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2) Βρείτε την τάξη του  $A$ .

3) Βρείτε τις λύσεις του ομογενούς συστήματος  $Ax = 0$  σε διανυσματική μορφή για τον παραπάνω πίνακα  $A$ .

4) Βρείτε την γενική λύση του  $Ax = b$  όταν  $b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3$ .

3. 1) Βρείτε έναν πίνακα  $A$  του οποίου ο χώρος στηλών να περιέχει τα  $(1, 1, 0)$  και  $(0, 1, 1)$ , ενώ ο μηδενόχωρος το  $(1, 1, 1, 1)$ .

2) Βρείτε έναν 2 επί 2 πίνακα του οποίου ο μηδενόχωρος είναι ίσος με τον χώρο στηλών του.

3) Βρείτε έναν πίνακα  $A$  του οποίου ο μηδενόχωρος αποτελείται από όλους τους γραμμικούς συνδιασμούς των διανυσμάτων  $(1, 1, 2), (0, 1, 1)$ .

4. 1) Ανήκει το διάνυσμα  $(1, -1, 0)$  στον υπόχωρο που παράγεται από το διάνυσμα  $(1, 0, 1)$ ;

2) Ανήκει το διάνυσμα  $(1, -1, 0, 3)$  στον υπόχωρο που παράγουν τα διανύσματα  $(1, 0, 1, 7)$  και  $(-1, 1, 0, -3)$ ;

5. 1) Βρείτε 2 διανύσματα του  $\mathbb{R}^3$  που να παράγουν το επίπεδο  $x = 0$

2) Βρείτε  $n$  διανύσματα του  $\mathbb{R}^n$  που να παράγουν τον  $\mathbb{R}^n$ .

3) Δείξτε ότι τα  $(1, 1)$  και  $(-1, 2)$  παράγουν τον  $\mathbb{R}^2$ .

6. Είναι τα ακόλουθα σωστά ή λάθος. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας.

1) Ένας τετραγωνικός πίνακας δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές.

2) Ένας αντιστρέψιμος πίνακας δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές.

3) Ένας  $m$  επί  $n$  πίνακας δεν έχει περισσότερες από  $n$  βασικές μεταβλητές.

4) Ένας  $m$  επί  $n$  πίνακας δεν έχει περισσότερες από  $m$  βασικές μεταβλητές.

7. Βρείτε τον πίνακα  $A$  εάν γνωρίζετε ότι η γενική λύση του συστήματος  $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  είναι η  $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

8. Ο μηδενόχωρος ενός 3 επί 4 πίνακα  $A$  παράγεται από το διάνυσμα  $(2, 3, 1, 0)$ .

1) Ποιά είναι η τάξη του  $A$  ;

2) Βρείτε την ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του  $A$ .

Δείτε την Άσκηση 2.17, σελ 43 των σημειώσεων για την περιγραφή της ανηγμένης κλιμακωτής μορφής.