

Γραμμική Άλγεβρα 1

Εαρινό 2013

Φυλλάδιο 8

Χρ. Κουρουνιώτης-Μ. Λουκάκη

1. Ποιές από τις παρακάτω απεικονίσεις από τον R^2 στον R^2 είναι γραμμικές;

1) $T(x, y) = (1 + x, y)$

2) $T(x, y) = (x - y, y)$

3) $T(x, y) = (\sin x, y)$

4) $T(x, y) = (x^2 + x, y)$

5) $T(x, y) = (0, 2x - y)$

2. Έστω T γραμμική απεικόνιση από τον R^2 στον R^3 τέτοια ώστε $T(1, 1) = (2, 3, 1)$ και $T(0, 1) = (1, 1, 2)$. Προσδιορίστε την T , δηλαδή δώστε τον τύπο $T(x, y)$ της T .

3. Ποιος πίνακας παριστάνει την απεικόνιση που στέλνει το $(1, 0)$ στο $(2, 5)$ και το $(0, 1)$ στο $(1, 3)$; Ποιος πίνακας στέλνει το $(2, 5)$ στο $(1, 0)$ και το $(1, 3)$ στο $(0, 1)$; Υπάρχει πίνακας που απεικονίζει το $(2, 6)$ στο $(1, 0)$ και το $(1, 3)$ στο $(0, 1)$; Υπάρχει πίνακας που απεικονίζει το $(1, 0, 0)$ στο $(1, 0)$ και το $(0, 1, 0)$ στο $(0, 1)$;

4. Προσδιορίστε τον πίνακα A της γραμμικής απεικόνισης f που ικανοποιεί $f(1, 1, 1) = (2, 1, 1)$, $f(0, 1, 2) = (1, 0, 1)$ και $f(0, 0, 1) = (1, 0, 0)$. Ποιος είναι ο τύπος της f ;

5. Εάν $f : R^n \rightarrow R^n$ γραμμική ένα προς ένα και επί δείξτε ότι

1) Η αντίστροφη είναι γραμμική.

2) Η f^2 είναι γραμμική.

6. Έστω T και U οι γραμμικές απεικονίσεις του R^2 που ορίζονται σαν

$$T(x, y) = (y, x) \text{ και } U(x, y) = (x, 0).$$

Δώστε τον τύπο και τον πίνακα των παρακάτω γραμμικών απεικονίσεων $(U+T)$, UT , TU , T^2 , U^2 . Τι παρατηρείτε;

7. Δώστε έναν 3 επί 3 πίνακα που σε κάθε διάνυσμα (x, y, z) αντιστοιχεί την προβολή του στην ευθεία που ορίζεται από τα σημεία $(0, 0, 0)$ και $(1, 2, 3)$.

8. Έστω T η γραμμική απεικόνιση του R^3 με τύπο

$$T(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z).$$

1) Είναι η T αντιστρέψιμη; Αν ναι βρείτε τύπο για την T^{-1} .

2) Δείξτε ότι η T ικανοποιεί $(T^2 - I)(T - 3I) = 0$.

9. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση f ώστε

$$f(1, 1, 2) = (1, 0, 2), f(0, -1, 1) = (1, 1, 1), f(1, 0, 2) = (3, 2, 4).$$

- 1) Βρείτε τον πίνακα A της παραπάνω απεικόνισης.
- 2) Δείξτε ότι η εικόνα της f είναι ένα επίπεδο στον R^3 .
- 3) Βρείτε τον πυρήνα της f .
- 4) Βρείτε έναν υπόχωρο V του R^3 διάστασης 2 ώστε $f(V) = f(R^3)$.
- 5) Δείξτε ότι η $f : V \rightarrow R^3$ είναι ένα προς ένα.
- 6) Βρείτε ένα διάνυσμα $v \in R^3$, ώστε $f(v) = (0, 1, -1)$.
- 7) Βρείτε έναν υπόχωρο W του R^3 διάστασης 2 με την ιδιότητα ο $f(W)$ να ισούται με τον χώρο που παράγεται από το διάνυσμα $(0, 1, -1)$.
- 8) Είναι η $f : W \rightarrow R^3$ ένα προς ένα;

10. 1) Να βρεθούν μία βάση και η διάσταση του πυρήνα και της εικόνας της εξής γραμμικής απεικόνισης: $f(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z)$
 2) Δείξτε ότι εάν $f, g : R^n \rightarrow R^m$ είναι γραμμικές απεικονίσεις που συμφωνούν στα στοιχεία μιας βάσης του R^n , τότε είναι ίσες.

11. Εάν V γνήσιος υπόχωρος του R^n και x διάνυσμα του R^n που δεν ανήκει στον V τότε βρείτε γραμμική απεικόνιση $f : R^n \rightarrow R$ ώστε $f(v) = 0$ για κάθε $v \in V$ και $f(x) = 1$.

12.* Αν $T : R^3 \rightarrow R^2$ και $U : R^2 \rightarrow R^3$ γραμμικές απεικονίσεις, δείξτε ότι η UT δεν μπορεί να είναι ισομορφισμός.