ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ
Τμήμα Μαθηματικών

Περίοδος Σεπτεμβίου 2013
Διδάσκοντες: Χ. Κουρουνιώτης, Μ. Λουκάκη

M1122 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι

Παρατηρήσεις και σχόλια στα θέματα Σεπτεμβρίου.

ΘΕΜΑ 1 (20) Δίδεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

α΄. Βρείτε τις διαστάσεις των τεσσάρων θεμελιωδών υποχώρων του A.

β΄. Παράγουν οι στήλες του A τον $\mathbb{R}^3$; Βρείτε μία βάση για το χώρο στηλών $\mathcal{R}(A)$.

γ΄. Παράγουν οι γραμμές του A τον $\mathbb{R}^4$; Βρείτε μία βάση για το χώρο γραμμών $\mathcal{R}(A^T)$.

Παρατηρήσεις:
Οι διαστάσεις των θεμελιωδών υποχώρων του πίνακα προσδιορίζονται από το μέγεθος $m \times n$ και την τάξη r του πίνακα (δείτε Σημειώσεις). Προσοχή στην απαλοιφή για να βρείτε το σωστό r. Δεν χρειάζεται να λύσετε κάποια εξίσωση για να βρείτε τις διαστάσεις.

Οι στήλες του A 'παράγουν' τον $\mathbb{R}^3$ εάν κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών του A. Αφού ο A έχει μόνον δύο γραμμικά ανεξάρτητες στήλες, αυτές παράγουν κάποιο επίπεδο μέσα στον $\mathbb{R}^3$, αλλά όχι όλο τον $\mathbb{R}^3$.

Μία βάση ενός διανυσματικού χώρου V είναι ένα **σύνολο** διανυσμάτων του V που είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν τον V. Σε πολλά γραπτά συγχέεται 'μία βάση' με 'ένα διάνυσμα μίας βάσης'. Αυτό είναι λάθος.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, μία βάση του χώρου στηλών είναι το σύνολο των στηλών του A που αντιστοιχούν σε στήλες του U που έχουν οδηγούς, $\{(1, -1, 2), (1, -2, 3)\}$. Υπάρχουν άπειρες βάσεις του χώρου στηλών, αλλά αυτή προκύπτει πιο εύκολα από τη διαδικασία της απαλοιφής.

Ανάλογα για το χώρο γραμμών (δείτε Σημειώσεις).

ΘΕΜΑ 2 (15) Δίδεται η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, για την οποία

$$T(x, y) = (x + sy, 3x + y)\,,$$

όπου s είναι πραγματικός αριθμός.

α′. Για ποιές τιμές του s είναι η T ένα προς ένα (ενεικονική); Για ποιές είναι επί (επεικονική);

β′. Εάν A είναι ο πίνακας που αντιστοιχεί στην απεικόνιση T, και b είναι το διάνυσμα $b = (2, t)$, βρείτε s και t τέτοια ώστε το σύστημα $Ax = b$ να έχει άπειρες λύσεις.

Παρατηρήσεις:
Βρίσκουμε πρώτα τον πίνακα A της απεικόνισης. Αφού $T(1, 0) = (1, 3)$ και $T(0, 1) = (s, 1)$, ο πίνακας είναι

$$A = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Η απεικόνιση είναι ενεικονική όταν όλες οι στήλες του πίνακα είναι γραμμικά ανεξάρτητες, δηλαδή όταν $r = n$.
Η απεικόνιση είναι επεικονική όταν οι στήλες του πίνακα παράγουν το χώρο $\mathbb{R}^m$, δηλαδή όταν $r = m$.

Παρατηρούμε (ή βρίσκουμε κάνοντας απαλοιφή) οτι οι στήλες του πίνακα A είναι γραμμικά ανεξάρτητες όταν $s \neq 1/3$.

Για να έχει το σύστημα $Ax = b$ περισσότερες από μία λύσεις, η T πρέπει να μην είναι ενεικονική, συνεπώς πρέπει να έχουμε $s = 1/3$. Επίσης πρέπει το $b = (2, t)$ να ανήκει στην εικόνα της T, συνεπώς $t = 6$.

ΘΕΜΑ 3 (15) Είναι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

αντιστρέψιμος; Εάν ναι, βρείτε τον αντίστροφό του.

Παρατηρήσεις:
Αρκεί να ακολουθήσετε προσεκτικά τη διαδικασία Gauss-Jordan.

ΘΕΜΑ 4 (20) Δίδεται ο πίνακας

$$B = \begin{bmatrix} -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

α′. Βρείτε τις ιδιοτιμές του πίνακα B και μία βάση για κάθε ιδιόχωρό του.

β′. Είναι ο B διαγωνιοποιήσιμος; Εάν είναι, βρείτε αντιστρέψιμο πίνακα P και διαγώνιο πίνακα D τέτοιους ώστε $B = PDP^{-1}$.

Παρατηρήσεις:
Βρίσκουμε πρώτα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του B υπολογίζοντας την ορίζουσα του

$B - lI_3$. Καταλήγουμε στο $-(x-5)^2(x-1)$. Αρα ιδιοτιμές είναι οι 5 (διπλή) και η 1 (απλή). (Σε αυτό το σημείο δεν μπορούμε να αποφασισουμε αν ο πίνακας είναι διαγωνισιμος ή όχι!!!) Για να βρούμε βάσεις για τους ζητούμενους ιδιόχωρους λύνουμε τα ομογενή $(A - 5I)X = 0$ και $(A - I)X = 0$. **Προσέξτε** δεν υπάρχει περίπτωση να βγάλετε μηδενικό ιδιοδιάνυσμα!!! Αυτό σημαίνει ότι είτε έχετε κάνει λάθος στην εύρεση των ιδιοτιμών είτε στην λύση του ομογενούς. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα, μια βάση για τον ιδιόχωρο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 5 είναι η $\{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ **και τα δύο διανύσματα, το καθένα μόνο του δεν αποτελεί βάση**. Επίσης μια βάση για τον ιδιόχωρο που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1 είναι η $\{(-2, 1, 0)\}$. Ο πίνακας είναι διαγωνίσιμος (δείτε την σχετική θεωρία) και οι ζητούμενοι πίνακες P, D είναι οι $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ και $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

ΘΕΜΑ 5 (20)

α′. Εάν T είναι η γραμμική απεικόνιση που ικανοποιεί $T(1, 2) = (3, 2)$ και $T(-2, 0) = (1, 1)$, βρείτε το $T(2, 2)$.

β′. Εάν L είναι η απεικόνιση $L : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ που δίδεται από τη σχέση $L(x) = |x|$, είναι η L γραμμική; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

γ′. Βρείτε τις γραμμικές απεικονίσεις $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ που στέλνουν την ευθεία $\{(x, y) : x = 0\}$ στον εαυτό της.

Παρατηρήσεις:
1) $(2, 2) = (1, 2) - 1/2(-2, 0)$ άρα $T(2, 2) = (3, 2) - 1/2(1, 1)$.
2) Δεν είναι γραμμική, υπάρχουν πολλοί τρόποι να το δικαιολογήσετε ένα παράδειγμα $L(-2 \cdot 5) \neq -2L(5)$.
3) Υπάρχουν αρκετοί τρόποι να λύσετε το γ. Ένας είναι να παρατηρήσετε ότι ζητάτε η ευθεία $x = 0$ να είναι ιδιόχωρος μιας τετοιας γραμμικής απεικόνισης T. Επομένως $T(0, 1) = (0, k)$ για $k \in \mathbb{R}$. (Για $k = 0$ όλη η ευθεία $x = 0$ μαζεύεται στο $(0, 0)$.) Η T στέλνει το $(1, 0)$ σε οποιοδήποτε διανυσμα (a, b), με $a, b \in \mathbb{R}$. Επομένως οι ζητούμενες γραμμικές απεικονίσεις είναι $T(x, y) = (ax, bx + ky)$ με $a, b, k \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 6 (15) Δίδεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Εάν S είναι ο χώρος στηλών του A, βρείτε το ορθογώνιο συμπλήρωμα $S^{\perp}$.

Παρατηρήσεις:
Ένας τρόπος είναι να χρησιμοποιήσετε την σχέση $S^{\perp} = N(A^T)$ και να υπολογίσετε τον

μηδενόχωρο του A^T. Ένας άλλος τρόπος είναι να υπολογίσετε μια βάση του S και έπειτα το ορθογώνιο συμπλήρωμά του υπολογίζοντας τα διανύσματα που είναι κάθετα στην βάση που έχετε βρει. Η απάντηση είναι $S^{\perp} =< (-1,-1,1) >$.