Γραμμική Άλγεβρα 1
Ασκήσεις

Πίνακες

1. Αν A ένας $m \times n$ πίνακας, τέτοιος ώστε $Ax = 0$ για κάθε διάνυσμα $x \in R^n$. Δείξτε ότι $A = 0$.

2. Αν A, B είναι 2 επί 2 πίνακες που αντιμετατίθενται με τον $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. δείξτε ότι $AB = BA$.

3.Ένας $n \times n$ πίνακας N ονομάζεται nilpotent αν υπάρχει k θετικός ακέραιος ώστε $N^k = 0$. Δείξτε ότι ένας nilpotent πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος.

4. Αν N ένας $n \times n$ nilpotent πίνακας, με $N^k = 0$, δείξτε ότι $I_n - N$ είναι αντιστρέψιμος. Υπολογίστε τον αντίστροφό του σαν συνάρτηση του N.

5. Αν A, B είναι αντιστρέψιμοι πίνακες δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα
1)A αντιμετατίθεται με τον B.
2)A αντιμετατίθεται με τον B^{-1}.
3)A^{-1} αντιμετατίθεται με τον B^{-1}.
4)A^t αντιμετατίθεται με τον B^t.

6. Αν A, B είναι ν επί ν πίνακες που τα αθροίσματα των στηλών τους είναι 1 δείξτε ότι και το άθροισμα των στηλών του AB είναι 1.

7. Βρείτε όλους τους 2 επί 2 πίνακες που αντιμετατίθενται με τον A αν
1) $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, 2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 3) A τυχαίος.

8. Δίνεται ο εξής πίνακας A

$$\begin{bmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1)Δείξτε ότι $A^3 = 3A^2 - 3A + I_3$
2)Δείξτε ότι ο A αντιστρέφεται και υπολογίστε τον αντίστροφό του.

9. Αν $A^3 = 2I$ και $B = A^2 - 2A + 2I$ δείξτε ότι ο B είναι αντιστρέψιμος.

10. Για ποια t είναι η τάξη του $A = \begin{bmatrix} t & 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 & 1 \\ 1 & 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & 1 & t \end{bmatrix}$ ακριβώς 3;

11. Βρείτε τον αντίστροφο του $n \times n$ πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ & & & & . & & \\ & & & & . & & \\ & & & & . & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

12. Αν A, B είναι $n \times n$ πίνακες ώστε $AB = 0$ δείξτε ότι

$$\text{ταξη του } A + \text{ τάξη του } B \leq n.$$

13. Για κάθε $n \times n$ πίνακα A ισχύει $A^2 = A$ αν και μόνο αν ταξη του $A +$ τάξη του $(A - I_n) = n$.

Γραμμική ανεξαρτησία-Βάσεις-Υπόχωροι

Όλοι οι δ.χ. είναι πεπερασμένης διάστασης.

14. Έστω k διανύσματα του R^n. Απαντήστε τις παρακάτω ερωτήσεις στην περίπτωση που $k < n$, $k = n$ ή $k > n$.
1)Είναι τα διανύσματα γραμμικώς ανεξάρτητα;
2)Παράγουν τον R^n;
3)Αποτελούν βάση του R^n;

15. Έστω ότι τα διανύσματα a_1, a_2, a_3 είναι γραμμικώς εξαρτημένα ενώ τα a_2, a_3, a_4 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Δείξτε ότι
1)το a_1 είναι γραμμικος συνδιασμός των a_2 και a_3.
2)το a_4 δεν είναι γραμμικός συνδιασμός των a_1, a_2, a_3.

16. Έστω $a_1, a_2, \dots a_n$ βάση του δ.χ. V όπου $n \geq 2$. Δείξτε ότι το σύνολο $a_1, a_1 + a_2, \dots a_1 + a_2 + \dots + a_n$ είναι επίσης βάση του V. Είναι το σύνολο

$$\{a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_{n-1} + a_n, a_n + a_1\}$$

επίσης βάση του V; Το αντίστροφο ισχύει;

17. Έστω $\{a_1, a_2, a_3\}$ βάση του R^3 και $a_4 = -a_1 - a_2 - a_3$. Δείξτε ότι κάθε διάνυσμα v του R^3 γράφεται σαν $v = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + x_4 a_4$ όπου x_1, x_2, x_3, x_4 είναι μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. Γενικεύστε σε n-διάστατο χώρο.

18. Έστω $a_1, a_2, \dots, a_r$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα. Αν το διάνυσμα u είναι γραμμικός συνδιασμός των $a_1, \dots, a_r$ ενώ το v δεν είναι δείξτε ότι τα διανύσματα $tu + v, a_1, a_2, \dots a_r$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα για κάθε t.

19. Έστω U, V υπόχωροι του R^n που παράγονται από τα διανύσματα $a_1, a_2, \dots a_r$ και $b_1, b_2, \dots b_s$ αντίστοιχα. Θεωρούμε τον υπόχωρο W του R^n που παράγεται από τα διανύσματα $a_i + b_j$ με $i = 1, \dots, r$ και $j = 1, \dots, s$. Αν $dimV = k$ και $dimU = m$, δείξτε ότι

$$dimW \leq min\{n, k + m\}.$$

20. Έστω S υπόχωρος ενός διαν. χώρου V. Δείξτε ότι
1) $dimS \leq dimV$
2) $dimS = dimV$ αν και μονο αν $S = V$.
3) Κάθε βάση του S περιέχεται σε κάποια βάση του V.
4) Μια βάση του V δεν περιέχει πάντα βάση του S.

21. Αν W_1, W_2 υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου V με $W_1, W_2 \neq \{0\}, V$.
1) Δείξτε ότι υπάρχει $a \in V$, με $a \notin W_1, a \notin W_2$.
2) Δείξτε ότι υπάρχει βάση B τοψ V που κανένα διάνυσμά της δεν ανήκει στο W_1 ή στο W_2. Ισχύει αυτό για παραπάνω από δύο υπόχωρους;

22. Αν W_1, W_2 υπόχωροι του V ορίζουμε

$$W_1 + W_2 = \{w_1 + w_2 / w_i \in W_i\}.$$

1) Δείξτε ότι $W_1 \cap W_2$, και $W_1 + W_2$ είναι υπόχωροι του V.
2) $W_1 \cap W_2 \subseteq W_1 \cup W_2 \subseteq W_1 + W_2$. Εξηγήστε γεωμετρικά αν $V = \mathbf{R}^2$.
3) Πότε είναι ο $W_1 \cup W_2$ υπόχωρος του V;
4) Δείξτε ότι $W_1 + W_2$ είναι ο μικρότερος υπόχωρος του V που περιέχει το σύνολο $W_1 \cup W_2$ δηλ. αν S είναι υπόχωρος του V τέτοιο ώστε $W_1 \cup W_2 \subseteq S$ τότε $W_1 + W_2 \subseteq S$.

23. Έστω W_1, W_2 υπόχωροι του δ.χ. V. Αν $dim(W_1 + W_2) = dim(W_1 \cap W_2) + 1$ τότε δείξτε ότι $W_1 + W_2$ είναι είτε W_1 ή W_2 και η τομή $W_1 \cap W_2$ είναι είτε W_2 ή W_1 αντίστοιχα. Ισοδύναμα αυτή η άσκηση λέει ότι για κάθε δύο υπόχωρους W_1, W_2 αν κανένας δεν περιέχει τον άλλον τότε

$$dim(W_1 + W_2) \geq dim(W_1 \cap W_2) + 2.$$

Γραμμικές απεικονίσεις

24. Αν $T : R^3 \to R^2$ και $U : R^2 \to R^3$ γραμμικές απεικονίσεις, δείξτε ότι η UT δεν μπορεί να είναι ισομορφισμός.

25. Αν T είναι μία γραμμική απεικόνιση δείξτε ότι

$$KerT \subseteq Im(1 - T)$$

και

$$ImT \subseteq Ker(1 - T).$$

26. Έστω T μία γραμμική απεικόνιση του R^n. Αν $T^{n-1}(x)$ $\not 0$ και $T^n(x) = 0$ για κάποιο $x \in R^n$, δείξτε ότι τα διανύσματα

$$x, T(x), T^2(x), \ldots, T^{n-1}(x),$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και άρα αποτελούν βάση του R^n.

27. T γραμμική απεικόνιση $T : V \to W$. Είναι τα παρακάτω σωστά η λάθος;
1) $KerT = 0$
2) Αν $T(x) = 0$ μόνο για $x = 0$, τοτε $dimV = dimW$.
3) Αν $ImT = 0$, τότε $T = 0$.
4) Αν $V = W$ και $ImT \subseteq KerT$ τότε $T = 0$.
5) Αν $V = W$ και $ImT \subseteq KerT$ τότε $T^2 = 0$.

6) Αν $dimV = dimW$ τότε ο T είναι αντιστρέψιμος.
7) Αν $dimV = dimImT$ τότε $KerT = \{0\}$.
8) $KerT \subseteq KerT^2$.
9) $dimKerT \leq dimImT$.
10) $dimkerT \leq dimV$.
11) T είναι 1-1 αν και μόνο αν $KerT = \{0\}$.
12) T είναι 1-1 αν και μόνο αν $dimV \leq dimW$.
13) T είναι επί αν και μόνο αν $ImT = W$.
14) T είναι επί αν και μόνο αν $dimV \geq dimW$.
15) Αν τα διανύσματα $v_1, \ldots v_k$ του V είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε και τα $T(v_1), \ldots T(v_k)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.
16) Αν τα $T(v_1), \ldots T(v_r)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τότε και τα $v_1, \ldots v_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.