Γραμμική ΙΙΙ, Χειμερινό 2013
Φυλλάδιο 2
Μαρία Λουκάκη

1. Ποιά είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε τα $(x,1,0),(1,x,1),(0,1,x)$ να είναι γραμ. ανεξάρτητα στο R^3 ;

2. Έστω $A = \{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \}$
1) Δείξτε ότι A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^{2\times 2}$
2) Βρείτε μία βάση του και την διάστασή του πάνω από το $\mathbb{R}$.

3. Έστω U, W υπόχωροι ενός δ.χ. V. Αν $V = U \cup W$ τότε είτε $V = U$ είτε $V = W$.

4. Έστω V ο δ.χ. των $n \times n$ πινάκων πάνω από το $\mathbb{C}$. Αν W ο υπόχωρος των άνω τριγωνικών πινάκων και U ο υπόχωρος των κάτω τριγωνικών πινάκων βρείτε από μία βάση για τους $W, U, W \cap U$ καθώς και τις διαστάσεις τους. Βρείτε τον $W + U$.

5.Έστω $\mathbb{R}_3[x]$ ο χώρος των πολυωνύμων πάνω από το $\mathbb{R}$ βαθμού ≤ 3. Αν W ο υπόχωρος του $\mathbb{R}_3[x]$ που παράγεται από τα $1+2x, -3x+5x^2$ να βρεθούν υπόχωροι $Z_1 \neq Z_2$ του $\mathbb{R}_3[x]$ ώστε $\mathbb{R}_3[x] = W \oplus Z_1 = W \oplus Z_2$.

6.Αν $W_1, \ldots, W_k$ υπόχωροι του δ.χ. V, δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα
α) $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$
β) για κάθε $u \in V$ υπάρχουν μοναδικά $u_i \in W_i$ ώστε $u = u_1 + \cdots + u_k$.

7.Αν $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(1,1,1),(0,-1,1)\}$ βάση του $\mathbb{R}^3$ βρείτε τη στήλη των συντελεστών $[v]_{\mathcal{B}}$ του διανύσματος $v = (1,2,3)$ ως προς την βάση $\mathcal{B}$.

8. Έστω W ο υπόχωρος του C^3 που παράγεται από τα $a_1 = (1,0,i)$ και $a_2 = (1+i,1,-1)$.
1) Δείξτε ότι τα a_1, a_2 είναι βάση του W.
2) Δείξτε ότι τα διανύσματα $b_1 = (1,1,0), b_2 = (1,i,1+i)$ επίσης αποτελούν βάση του W.
3) Βρείτε τις συντεταγμένες των a_1, a_2 σε σχέση με την βάση $\{b_1, b_2\}$.