Γραμμική ΙΙΙ, Χειμερινό 2013
Φυλλάδιο 4 (Συναρτησοειδή)

1. Έστω $\mathcal{B} = \{b_1 = (1, 0, -1), b_2 = (1, 1, 1), b_3 = (2, 2, 0)\}$ βάση του $\mathbb{R}^3$. Βρείτε
1) τα συναρτησοειδή $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ που ικανοποιούν $f(b_1) = f(b_2) = 0$ και $f(b_3) \neq 0$.
2) αν $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ και $f(b_1) = 1, f(b_2) = 2, f(b_3) = 3$ βρείτε τύπο για το $f(x, y, z)$.

2. Στον χώρο των πολυωνύμων $\mathcal{P}_2$ βαθμού μέχρι και 2 ορίζουμε τα εξής 3 συναρτησοειδή

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x)dx,\ f_2(p) = \int_0^2 p(x)dx,\ f_3(p) = \int_{-1}^0 p(x)dx$$

για κάθε πολυώνυμο $p \in \mathcal{P}_2$. Δείξτε ότι τα $\{f_1, f_2, f_3\}$ είναι βάση του $\mathcal{P}_2^*$ υπολογίζοντας μια βάση του $\mathcal{P}_2$ της οποίας είναι δυική.

3. Έστω $a_1 = (1, 0, -1, 2)$, $a_2 = (2, 3, 1, 1)$ και $W =< a_1, a_2 >$ ο υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$ που παράγεται από τα a_1, a_2. Βρείτε τον W^o.

4. Αν W_1, W_2 υπόχωροι ενός δ.χ. V δείξτε ότι
α) $(W_1 + W_2)^o = W_1^o \cap W_2^o$
β) $(W_1 \cap W_2)^o = W_1^o + W_2^o$

5. Έστω V δ.ξ. πεπερ. διαστασης πάνω από σώμα $\mathcal{F}$ και $S : V \to V$ γραμ. απεικόνιση τέτοια ώστε $\lambda \in \mathcal{F}$ είναι ιδιοτιμή της με αντίστοιχο μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα το $v \in V$, δηλ., $S(v) = \lambda v$. Αν S^t ο συζυγής μετασχηματισμός της S δείξτε ότι υπάρχει μη μηδενική $f \in V^*$ ώστε $S^t(f) = \lambda f$. (Υπενθύμιση: ο συζυγής μετασχηματισμός $S^t : V^* \to V^*$ της S ορίζεται σαν $(S^t(g))(u) = (goS)(u)$ για κάθε $g \in V^*$ και $u \in V$.