Γραμμική ΙΙΙ
Φυλλάδιο 7

1. 1) Έστω $f : V \to V$ και B βάση του V ώστε

$$_B[f]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Βρείτε όλους τους f-αναλλοίωτους υπόχωρους του f.
2) Έστω $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ με τύπο $T(x, y) = (0, y)$. Βρείτε όλους τους T-αναλλοίωτους υπόχωρους του $\mathbb{C}^2$.

2. 1) Έστω $f : V \to V$ και $f^2 - f + I_V = 0$. Δείξτε ότι ο f είναι αντιστρέψιμος.
2) Έστω T αντιστρέψιμος. Δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p(x)$ ώστε $T^{-1} = p(T)$. (Υποδ. Σκεφτείτε το ελάχιστο πολυώνυμο του T).

3. Έστω $T : V \to V$ γραμμική. Αν κάθε υπόχωρος του V είναι T-αναλλοίωτος δείξτε ότι ο T είναι πολλαπλάσιο του I_V.

4. Βρείτε το χαρακτηριστικό και το ελάχιστο πολυώνυμο για τους

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

και βρείτε ποιοί είναι διαγωνιοποιήσιμοι χρησιμοποιώντας το κριτήριο για το ελάχιστο πολυώνυμο.

5. Έστω $f, g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ τέτοιοι ώστε $f(x, y) = (x + y, y)$ και $f \circ g = g \circ f$. Δείξτε τότε ότι υπάρχει $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ ώστε $g = p(f)$.