Γραμμική ΙΙΙ, Χειμερινό 2013
Φυλλάδιο 8

1. Βρείτε την κανονική μορφή Jordan των παρακάτω πινάκων πάνω από το $\mathbb{C}$

$$A=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3&1&0\\-1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2&0&1&0\\0&2&0&1\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}, D\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&2&0\\1&1&2&-1\\0&0&2&2\end{pmatrix}.$$

2. Δείξτε ότι όλοι οι άνω τριγωνικοί $n\times n$ πίνακες με μηδενικά στην διαγώνιο, της μορφής

$$\begin{pmatrix}0&a_{1,2}&a_{1,3}&\cdots&a_{1,n}\\0&0&a_{2,3}&\cdots&a_{2,n}\\0&0&0&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&0&a_{n-1,n}\\0&0&&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

με $a_{1,2}\neq 0, a_{2,3}\neq 0,\cdots,a_{n-1,n}\neq 0$, είναι όμοιοι.

3.Έστω $f: V\to V$ $(dimV<\infty)$ μηδενοδύναμη γραμμική απεικόνιση. Αν γνωρίζουμε την κανονική μορφή Jordan της f μπορούμε να βρούμε το ελάχιστο πολυώνυμό της;

4. Πόσοι διαφορετικοί (όχι όμοιοι) πίνακες υπάρχουν με χαρακτηριστικό πολυώνυμο το x^8 ;

5. Έστω $f: V\to V$ γραμμική μηδενοδύναμη απεικόνιση. Αν $dimV=n$ δείξτε
1) Ο δείκτης της f είναι $\leq n$
2) $tr(f)=0$.

6. Να βρεθούν όλοι οι 5 επί 5 μιγαδικοί πίνακες A που ικανοποιούν $A=A^2$

7. Να βρεθούν όλοι οι 6 επί 6 μιγαδικοί πίνακες A με $\chi_A(x)=x^2(x-5)^4$

8. Να βρεθούν όλοι οι 6 επί 6 μιγαδικοί πίνακες A με $m_A(x)=(x_1)^2(x+1)^2$

9. Να βρεθούν όλοι οι 6 επί 6 μιγαδικοί πίνακες A με $\chi_A(x)=(x-1)^6$ και $m_A(x)=(x_1)^3$

10. Βρείτε 4 επι 4 πίνακα A με $m_A(x)=\chi_A(x)=(x-2)^2(x-3)^2$.

11. Δώστε παράδειγμα 2 μιγαδικών μηδενοδύναμων πινάκων που ενώ έχουν ίδιο χαρακτηριστικό και ελάχιστο πολυώνυμο δεν είναι όμοιοι. Μπορείτε να βρείτε παράδειγμα με πίνακες οποιασδήποτε διάστασης;