Γραμμική ΙΙΙ, Χειμερινό 2013
Φυλλάδιο 9

Στις επόμενες ασκήσεις ο V είναι διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο $< .,. >$.

1. Αν T γραμμική απεικόνιση του V τέτοια ώστε $< Tv, u >= 0$ για κάθε $v, u \in V$ τότε $T = 0$.

2. Αν T, U γραμμικές απεικονίσεις στο $L(V)$ αποδείξτε ότι:
1)$(TU)^* = U^*T^*$
2)$(T^*)^* = T$
3) Αν T είναι αντιστρέψιμος τότε και ο T^* είναι και ισχύει $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

3. Δείξτε ότι το γινόμενο δύο ερμιτιανών τελεστών T, U είναι ερμιτιανός αν και μόνο $TU = UT$.

4. Έστω V δ.χ. με εσωτερικό γινόμενο και πεπερασμένη διάσταση, και W γραμμικός υπόχωρός του. Δείξτε ότι η ορθογωνια προβολή $pr_W : V \to V$ είναι ερμιτιανή γραμμική απεικόνιση.

5. Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$ συμμετρικός. Δείξτε ότι τα επόμενα είναι ισοδύναμα.
1) Όλες οι ιδιοτιμές του A είναι θετικές.
2) $< Ax, x >> 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.
Οι συμμετρικοί πίνακες με την παραπάνω ιδιότητα ονομάζονται θετικά ορισμένοι (ή θετικοί). Δώστε παράδειγμα ενός θετικά ορισμένου πραγματικού συμμετρικού πίνακα.