Σύντομες Λύσεις - Υποδ.
Φυλλάδιο 10.

<u>Σελ. 153</u> $\boxed{4}$ i) Σ. ii) Λ iii) Σ

$\boxed{6}$ $|A(x+y)|=|x+y|$ άρα $\langle A(x+y), A(x+y)\rangle = \langle x+y, x+y\rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle Ax, Ax\rangle + \langle Ay, Ax\rangle + \langle Ax, Ay\rangle + \langle Ay, Ay\rangle = \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle +$

$+ \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \underset{\substack{|Ax|=|x| \\ |Ay|=|y|}}{\Longrightarrow} \langle Ay, Ax\rangle + \langle Ax, Ay\rangle = \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle$ ①

Αντικαθιστούμε το y με iy στην ① και έχουμε

$i\langle Ay, Ax\rangle - i\langle Ax, Ay\rangle = -i\langle x,y\rangle + i\langle y,x\rangle$ ②

Προσθέτουμε στην ② την ①$\cdot i$ και έχουμε

$2i\langle Ay, Ax\rangle = 2i\langle y,x\rangle \Longrightarrow \langle Ay, Ax\rangle = \langle y,x\rangle, \ \forall x,y$

άρα A είναι μοναδιαίος (unitary).

$\boxed{7}$ $\langle Ax,x\rangle = 0 \quad \forall\, x\in \mathbb{C}^{n\times 1}$ άρα $\langle A(x+y), x+y\rangle = 0, \ \forall x,y \in \mathbb{C}^{n\times 1}$

$\langle Ax,x\rangle + \langle Ay,y\rangle + \langle Ax,y\rangle + \langle Ay,x\rangle = 0 \quad \forall x,y.$

Επομένως

και άρα $\langle Ax,y\rangle + \langle Ay,x\rangle = 0 \quad \forall x,y.$ ①

Αντικαθιστούμε το y με $i\cdot y$ στην ① και έχουμε

$-i\langle Ax,y\rangle + i\langle Ay,x\rangle = 0.$ ②

Πολ/ζουμε την ① με i και προσθ. στην ② και έτσι

$2i\langle Ay,x\rangle = 0 \Longrightarrow \langle Ay,x\rangle = 0 \quad \forall\, x,y\in\mathbb{C}^{n\times 1}$

Επομένως $\underline{A\equiv 0}$

$\boxed{10}$ Πρώτα δείχνουμε ότι αν $A^k x = 0$, $k>1$ και A ερμιτιανός τότε και $A^{k-1}x=0$. Αυτό αρκεί για να δείξουμε την 10 (γιατί;)

A ερμιτιανός άρα $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle, \ \forall\, u,v\in\mathbb{C}^{n\times 1}$

Επίσης $A^k x = 0$ άρα $\langle A^k x, A^{k-2}x\rangle = 0 \Longrightarrow \langle A(A^{k-1}x), A^{k-2}x\rangle = 0$

$\Longrightarrow \langle A^{k-1}x, A\cdot(A^{k-2}x)\rangle = 0 \Longrightarrow \langle A^{k-1}x, A^{k-1}x\rangle = 0.$

Άρα $A^{k-1}x = 0 \ \ldots$

$\boxed{11}$ Ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ είναι μοναδιαίος αφού οι γραμμές του είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^3$

(έκανα Gram-Schmidt στη βάση $(1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}), (1,-1,0), (0,0,1)$.)

Σελ. 160

$\boxed{2}$ Ψάχνω ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων του A. Αυτά θα βάλω για στήλες του U και θα έχω το ζητούμενο (γιατί;)

Ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ έχει $\chi_A(x)=(x-4)(1-x)^2$

Ιδιοδ. για την ιδιοτ. 4.

$$A-4I=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα ιδιόχωρος για την ιδ. 4 ο $W_1=\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Ιδιοδ. για την ιδιοτ. 1

$$A-I=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα ιδιόχωρος για την ιδ. 1 ο $W_2=\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Ορθοκανονική βάση για τον W_1 η $\mathcal{B}_1=\left\{ 1/\sqrt{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Ορθοκανονική βάση για τον W_2 η $\mathcal{B}_2=\left\{ 1/\sqrt{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(Για την $\mathcal{B}_2$ έκανα Gram-Schmidt στη βάση $(-1,1,0), (-1,0,1)$)

Επομένως $U=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$\boxed{3}$ i) Σ ii) Σ $D=U^{-1}AU$ με U μοναδ. και πραγματικό άρα $U^*=U^{-1}$ και $U^*=U^t$ άρα $D=U^{-1}AU \Rightarrow A=UDU^{-1}=UDU^t$

Επομ. $A^t=(UDU^t)^t=UD^tU^t \Rightarrow$

$\Rightarrow A^t=UD^tU^{-1} \Longrightarrow$ (γιατί;) $D^t=D$ γιατί ...)

$\boxed{4}$ Δείτε το δεύτερο φασματικό θεώρημα για unitary πίνακες πάνω από το $\mathbb{R}$. Αφού ο A έχει μόνο πραγματικές ιδιοτιμές αυτές θα είναι ± 1 και άρα ο A είναι όμοιος με πίνακα της μορφής

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

(δεν έχει στροφές...)

Επομένως $U^{-1}AU = D$ με U μοναδιαίο πραγματικό (άρα $U^{-1} = U^* = U^t$)

Άρα $A = UDU^{-1} = UDU^t$ επομένως

$A^t = UD^tU^t = UDU^{-1} = A$ άρα A συμμετρικός