# Υποδείξεις - Σύντομες Λύσεις
## Φυλλάδιο 2
## Γραμμική 2

**1.**

1) Λάθος
2) Σωστό
3) Σωστό
4) Λάθος
5) Σωστό

**2**

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \ker f = \{(x,0) / x \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0) \rangle$

$(x,y) \to (y,0)$ $\quad \operatorname{Im} f = \{(y,0) / y \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0) \rangle$

Δεν υπάρχει αντίστοιχη στον $\mathbb{R}^3$ αφού $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = 3$ για κάθε $f$ γραμ. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Άρα θα είχαμε

$2 \dim \ker f = 3$ άτοπο.

**3**

$$[f]_{e}^{\hat{e}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{γιατί;})$$

Επίσης $f(1,1,0) = (-1,2) + (2,2) = (1,4)$

$f(0,1,0) = (2,2)$

$f(0,1,1) = (1,1)$

Άρα $[f]_{\hat{B}}^{\hat{e}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

**4**

α) Αφού $f(g(v)) = 0$ για κάθε $v \in V$, έχουμε ότι $\operatorname{Im} g \subseteq \ker f$.

Άρα $\dim \operatorname{Im} g \leq \dim \ker f$

Επίσης $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = n = \dim V$ άρα

$n = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f \geq \dim \operatorname{Im} g + \dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rank} g + \operatorname{rank} f$

ορισμός τάξης $\operatorname{rank} f = \dim \operatorname{Im} f$

β) Έστω $f \in L(V)$ και έστω $K = \ker f$ ο μηδενόχωρος της $f$.

Έστω $\hat{B} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ βάση του $K$. Επεκτείνουμε την $\hat{B}$ σε βάση του $V$ δηλ. $B := \{v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_s\}$ όπου $s + k = n = \dim V$ και $B$ βάση του $V$. Ορίζουμε $g$ ως εξής

$g(v_i) = v_i \quad \forall i = 1, \ldots, k$ και $g(w_i) = 0$ και επεκτείνουμε γραμμικά.

Τότε $\ker g = \langle w_1, \ldots, w_s \rangle$ ενώ $\operatorname{Im} g = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle = K$

Επομένως $f \circ g = 0$ (γιατί; δες $\operatorname{Im} g = K = \ker f$)

Ισχύει $\operatorname{rank} g = \dim \operatorname{Im} g = \dim K = k$

Επίσης $\operatorname{rank} f = \dim \operatorname{Im} f = n - \dim \ker f = n - \dim K_1 = n - k$

Επομένως $\operatorname{rank} f + \operatorname{rank} g = n - k + k = n$

**5**

$$\operatorname{Ker} f = \{ k_0 + k_1 x + k_2 x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \ / \ f(k_0 + k_1 x + k_2 x^2) = 0 \} =$$

$$= \{ k_0 + k_1 x + k_2 x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \ / \ k_0 + (k_2 - k_0)x = 0 \} =$$

$$= \{ k_0 + k_1 x + k_2 x^2 \in \mathbb{R}_2[x] \ / \ \begin{matrix} k_0 = 0 \\ k_2 = k_0 = 0 \end{matrix} \}$$

Άρα $\operatorname{Ker} f = \{ k_1 x \in \mathbb{R}_2[x] \} = \langle x \rangle$

Έστω $\hat{\alpha}$ η εξής βάση του $\mathbb{R}_2[x]$ : $\hat{\alpha} = \{1, x^2, x\}$

Ισχύει: $f(1) = 1 - x$ ενώ $f(x^2) = x$

Παίρνουμε βάση $\hat{b}$ του $\mathbb{R}_2[x]$ την $\hat{b} = \{1-x, x, x^2\}$.

Τότε $[f]_{\hat{\alpha}}^{\hat{b}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (επαληθεύστε)

**6**

$f \circ g = g \circ f$ για κάθε $g \in L(V)$. Έστω $\{v_1, \dots, v_n\}$ βάση του $V$.

Θεωρούμε $\{g_i\}_{i=1}^{n}$ γραμ. απεικονίσεις στον $L(V)$ ορισμένες ως εξής

① $g_i(v_j) = \begin{cases} v_j & \text{αν } i = j \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$. Αφού $f$ γραμ. υπάρχουν $\{b_{i,j}\}_{i,j=1 \dots n}$ στοιχεία του $\mathbb{F}$ ώστε να ισχύει

---

② $f(v_j) = b_{1j} v_1 + b_{2j} v_2 + \dots + b_{nj} v_n$ για κάθε $j = 1, \dots, n$

Επομένως για κάθε $j = 1 \dots n$ και $i = 1, \dots, n$ έχουμε

$$f \circ g_i(v_j) \overset{(2)}{=} \begin{cases} f(v_j) & \text{αν } j = i \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \overset{(1)}{=} \begin{cases} b_{1j} v_1 + b_{2j} v_2 + \dots + b_{nj} v_n & \text{αν } j = i \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Επίσης

$$g_i \circ f(v_j) \overset{(1)}{=} g_i(b_{1j} v_1 + b_{2j} v_2 + \dots + b_{nj} v_n) \overset{(2)}{=} b_{ij} v_i$$

γιατί;

Αλλά $f \circ g_i(v_j) = g_i \circ f(v_j)$ για κάθε $i, j = 1, \dots, n$

και άρα

Αν $i \neq j$ έχουμε $0 = b_{ij} v_i \Rightarrow b_{ij} = 0$ για κάθε $i \neq j$

Αν $i = j$ έχουμε $b_{1i} v_1 + b_{2i} v_2 + \dots + b_{ni} v_n = b_{ii} v_i$

Επομένως για κάθε $j = 1, \dots, n$ ισχύει

$$f(v_j) = b_{jj} v_j$$

Μένει να δείξουμε ότι όλα τα $b_{jj}$ είναι ίδια. δηλ.

για κάθε $j = 1, \dots, n$, $b_{jj} = a$ για $a \in F$

Ορίζουμε $h \in L(V)$ ως εξής $h(v_1) = v_2$, $h(v_2) = v_1$,

για κάθε $i = 3, 4, \dots, n$ θεωρούμε $h(v_i) = 0$ και επεκτείνουμε από την βάση γραμμικά σε όλο το $V$ την $h$.

Τότε $f \circ h(v_1) = f(v_2) = b_{22} v_2$ ενώ $h \circ f(v_1) = h(b_{11} v_1) = b_{11} h(v_1) = b_{11} v_2$

Όμως $f \circ h = h \circ f$ και

άρα $b_{22} = b_{11}$.

Αντίστοιχα ορίζουμε $h_i$ με $h_i(v_1) = v_i$, $h_i(v_i) = v_1$

ενώ $h_i(v_j) = 0$ για τα υπόλοιπα $j$

Από την σχέση $f \circ h_i = h_i \circ f$ δείχνουμε ότι

$b_{11} = b_{ii}$ για κάθε $i = 2, 3, \dots, n$.

οπότε $f(v_j) = b_{11} v_j$ για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$.