Υποδείξεις — Σύντομες Λύσεις
Φυλλάδιο 5.

10 σελ. 52

Αφού $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ θα έχουμε $\chi_A(x) = (-1)^n (x-\lambda_1)^{r_1} \cdots (x-\lambda_k)^{r_k}$
όπου $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ οι ιδιοτιμές του.
Άρα $\chi_A(x) = (-1)^n x^n$ αφού 0 η μοναδική ιδιοτιμή του.

13 σελ. 52

Έστω u ιδιοδ. της f άρα $f(u) = \lambda u$ για $\lambda \in \mathbb{F}$.
Επομένως $g(f(u)) = g(\lambda u) = \lambda g(u) \underset{g\circ f = f\circ g}{\Longleftrightarrow} f(g(u)) = \lambda \cdot g(u)$
Άρα αν $g(u) \neq 0$ ($\Leftrightarrow u \notin \operatorname{Ker} g$) τότε $g(u)$ είναι ιδιοδ. της f (για την ίδια ιδιοτιμή λ).

3 σελ. 74

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και } P^{-1}AP = D$$

5 σελ. 74

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \chi_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -x & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -x & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = (x^2-6)(x^2+4) = (x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})(x^2+4)$$

Άρα A δεν είναι διαγ. σαν πίνακας του $\mathbb{R}^{4\times 4}$
ενώ σαν πίνακας του $\mathbb{C}^{4\times 4}$ έχει $\chi_A(x) = (x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})(x-i2)(x+2i)$
και άρα είναι διαγων.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \chi_B(x) = x^2(x^2-2) = x^2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$

<u>Ιδιόχωρος που αντιστ. στην ιδιοτιμή 0</u>: λύνουμε $B\vec{x} = 0$

και $B \sim \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ άρα η διάσταση του ιδιόχωρου (= πλήθος ελεύθερων μεταβλητών) γεωμ. ισούται με $1 < 2$.

Επομένως B δεν είναι διαγ. ούτε στο $\mathbb{R}$ ούτε στο $\mathbb{C}$

14 Επαληθεύστε ότι οι παρακάτω πίνακες δίνουν αντιπαραδείγματα

1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ στο $\mathbb{C}^{2\times 2}$ (ή $\mathbb{R}^{2\times 2}$)

2) δες το 1)

3) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι διαγώνιοι (γιατί;)
ενώ το άθροισμά τους $= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ δεν είναι

4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

16 σελ. 76

i) Όχι αφού Α διαγ. $\Rightarrow \chi_A(x) = (-1)^4 (x-\lambda_1)^{r_1}(x-\lambda_2)^{r_2}\cdots(x-\lambda_k)^{r_k}$
όλοι οι όροι της μορφής $(x-\lambda_i)^{r_i}$ και $r_i = \dim V_i$
V_i αντίστοιχος (στο λ_i) ιδιόχωρος

ii) Αν $\chi_A = (x+1)^2(x^2+1) = (x+1)^2(x-i)(x+i)$
τότε Α έχει ιδιοτιμές -1 (διπλή), i, $-i$ και αντίστοιχους
ιδιόχωρους V_{-1}, V_i, V_{-i}. Αφού Α διαγ. $\dim V_1 = 2$, $\dim V_i = 1$
και $\dim V_{-i} = 1$.

18 σελ. 76

$\chi_A(x) = -(x-5)^2(x-7)$ άρα Α διαγ. ανν $\dim W = 2$
όπου W ο ιδιόχωρος που αντιστ. στην ιδιοτ. 5.

$A - 5I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 2 \end{bmatrix}$ Άρα $\dim W = 2$ ανν $\mathrm{rank}(A-5I) = 1$
δηλ. έχουμε 2 ελεύθερες μεταβλητές
(ισοδ. μόνο ένα οδηγό).

Άρα Α διαγ. ανν $\alpha = 0$
b, c οτιδήποτε. (γιατί;)

19 σχ. 77

f_1, f_2 διαγων. άρα υπάρχουν $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ βάσεις για τους W_1 και W_2 αντίστοιχα ώστε

$$[f_1]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_k \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad [f_2]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_r \end{bmatrix}.$$

Αν $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_k\}$ και $\mathcal{B}_2 = \{u_1, \dots, u_r\}$ τότε $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_r\}$ είναι βάση του V

Επίσης (δείξτε γιατί)

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & \mu_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \mu_r \end{bmatrix} \text{ άρα διαγων.}$$

2 Πιθανά χαρακτηριστικά πολυώνυμα.

1) $x^3(x-1)(x-3)(x-5)$
2) $x^2(x-1)^2(x-3)(x-5)$
3) $x^2(x-1)(x-3)^2(x-5)$
4) $x^2(x-1)(x-3)(x-5)^2$.

Αν επιπλέον $\dim W_1 = 2$ τότε μοναδικό χαρακτ. πολ. το $x^2(x-1)^2(x-3)(x-5)$ και αφού αλγεβρική πολ/τα = γεωμ. πολ. για κάθε ιδιοτιμή θα έχουμε A διαγων. Επομένως (δείξτε άσκηση 21 γιατί...) ο A θα είναι όμοιος με τον

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & & 0 \\ & 0 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 3 & \\ 0 & & & & & 5 \end{bmatrix}$$