Φυλλάδιο 6 - Σύντομες Λύσεις - Υποδείξεις

1 σελ. 90

Ο A έχει $\chi_A(x)=x^2-2x+5 = m_A(x)$ Άρα $A^2-2A+5I=0$

i) Επίσης $p(x)=x^7-3x^6+3x^5+5x^4+x=(x^2-2x+5)(x^5-x^4-4x^3+2x^2+24x+38)-$
$-43x-190$

Άρα η ζητούμενη παράσταση $p(A) = 0 - 43A - 190 = \dots$

ii) $A^2-2A+5I=0 \Rightarrow A(A-2I)=-5I$, Άρα

$$A^{2003}(A-2I)^{2004} = [A(A-2I)]^{2003}(A-2I) = (-5I)^{2003}(A-2I) = (-5)^{2003}(A-2I) = \dots$$

5 σελ. 91

i) $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ Άρα κάθε $A=\begin{bmatrix}2 & x\\ 0 & 3\end{bmatrix}$, $x\in\mathbb{F}$
έχει $\chi_A(x)=(x-2)(x-3)$

ii) $\chi_A=(x-1)(x-4)+2 = x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$ και
όλα τα πολυώνυμα $\varphi(x)=(x-2)(x-3)\cdot q(x)$ με $q(x)\in\mathbb{F}[x]$
ικανοποιούνται από A.

6 σελ. 91

i) $A=\begin{bmatrix}0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0\end{bmatrix}$ δείξτε $A^2=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdot & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 \\ 0 & & & 0\end{bmatrix}$, $A^3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & * \\ & \ddots & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & & & 0\end{bmatrix}$, ..., $A^{n-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & * \\ & \ddots & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & & & 0\end{bmatrix}$

και $A^n=0$.

Ή πιο σύντομα

Δείξτε ότι $\chi_A(x)=x^n$ άρα $\chi_A(A)=0 \Leftrightarrow A^n=0$ και επομένως $A^k=0, \forall k\geq n$

ii) $A=I+B$ όπου $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Επομένως $A^2=I+B^2+2B = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix}0&0&-3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{B^2} + \begin{pmatrix}0&-2&4\\0&0&6\\0&0&0\end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix}1&-2&1\\0&1&6\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Για $n\geq 3$, $B^n=0$ επομένως για $n\geq 3$ έχουμε

$$A^n=(I+B)^n = I+\binom{n}{1}B+\binom{n}{2}B^2+\binom{n}{3}\underbrace{\cancel{B^3}}_{0}+\dots+\underbrace{\cancel{B^n}}_{0} =$$

$$= I+nB+\frac{n(n-1)}{2}B^2$$

2 σελ. 101

iii) Το πολυώνυμο x^2-1 είναι μηδενίζον για την f (αφού $(A^t)^t = A$ άρα $f^2(A) = 1$) ενώ τα πολυώνυμα $x-1$ και $x+1$ δεν είναι μηδ. για την f (γιατί ....)

Άρα $m_f(x) = x^2 - 1$.

4 σελ. 102

Αν $\lambda_1, \dots, \lambda_\mu$ οι μ διακεκριμένες ιδιοτιμές της f τότε (γιατί;)
$\chi_f(x) = (-1)^\mu (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_\mu)$. Επομένως (γιατί;)
$m_f(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_\mu)$ και άρα $\deg m_f(x) = \mu$.
(Επίσης δείξτε ότι υπάρχει βάση $\mathcal{B}$ του V ώστε

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_\mu \end{bmatrix}$$

γιατί; Αν δεν είναι διακεκριμένες ισχύει;)

5 σελ. 102

$\chi_A(x) = (x-3)^3$, $m_A(x) = (x-3)^3$ (αφού $(A-3I)^2 \neq 0_{3\times 3}$)

$\chi_B(x) = (x-3)^3$, $m_B(x) = x-3$ (αφού $A-3I=0$)

Επομένως A, B δεν είναι όμοιοι (θα έπρεπε να έχουν ίδιο ελάχιστο πολυώνυμο. Άσκηση: Γράψτε τα κοινά "χαρακτηριστικά" όμοιων πινάκων (όπως χαρακτ. πολ., ελάχιστο πολ.)

7 σελ. 102

Έστω $m_A(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ τότε $m_A(A) = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_0 + a_1 A + \dots + a_{n-1}A^{n-1} + A^n = 0 \Rightarrow (a_0 + a_1 A + \dots + a_{n-1}A^{n-1} + A^n)^t = 0^t = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_0 + a_1 A^t + a_{n-1}(A^t)^{n-1} + \dots + (A^t)^n = 0$ Άρα $m_A(A^t) = 0$ δηλ. $m_A(x)$ είναι μηδενίζον για το A^t. Άρα (γιατί;) $m_{A^t}(x) / m_A(x)$

Αντίστοιχα δείχνουμε ότι $m_A(x) / m_{A^t}(x)$ και άρα (σαν μονικά) έχουμε $m_A = m_{A^t}$

10 σελ. 102

Αν B ένας $n \times n$ πίνακας τότε B είναι αντιστρέψιμος ανν 0 δεν είναι ιδιοτιμή του B ανν $x \nmid \chi_B(x)$ ανν $x \nmid m_B(x)$ ανν $m_B(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{k-1}x^{n-1} + x^n$ με $a_0 \neq 0$ ανν $m_B(0) \neq 0$.

(Επαγωγικά ίδιο της προηγούμενης ισοδυναμίας).

Για τον πίνακα $\varphi(A)$ λοιπόν ισχύει:

$\varphi(A)$ αντιστρεψ. ανν $m_{\varphi(A)}(0) \neq 0$

Έστω $m_{\varphi(A)}(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{k-1}x^{k-1} + x^k =$

$$= \alpha_0 + x\,[\underbrace{\alpha_1 + \alpha_2 x + \dots + \alpha_{k-1}x^{k-2} + x^{k-1}}_{p(x)}] =$$

$$= \alpha_0 + x \cdot p(x)$$

Άρα $0 = m_{\varphi(A)}(\varphi(A)) = \alpha_0 + \varphi(A)\,p(\varphi(A)) = \alpha_0 + \varphi(A) \cdot [p \circ \varphi(A)]$

Άρα το πολυώνυμο $\alpha_0 + \varphi(x)(p\circ\varphi(x))$ είναι μηδενίζον για το A επομένως

$$\underline{m_A(x) \mid \alpha_0 + \varphi(x)\,p(\varphi(x))}$$

Άρα κάθε κοινός διαιρέτης των $m_A(x)$ και $\varphi(x)$ είναι και διαιρέτης του α_0. Επομένως $(m_A(x), \varphi(x)) \mid \alpha_0$. (Δείτε ότι $(m_A(x), \varphi(x))$ δεν είναι αριθμός $\neq 1$ αφού $m_A(x)$ είναι μονικό)

Επομένως αν $\alpha_0 \neq 0$ τότε $(m_A(x), \varphi(x)) = 1$.
Άρα δείξαμε ότι $\varphi(A)$ αντιστρ. $\Longrightarrow (m_A(x), \varphi(x)) = 1$.

__Αντίστροφα__
Έστω ότι ισχύει $(m_A(x), \varphi(x)) = 1$ τότε υπάρχουν πολυώνυμα $q(x)$ και $p(x)$ τ.ω. $m_A(x)q(x) + \varphi(x)\cdot p(x) = 1$

Επομένως $\underbrace{m_A(A)}_{0}q(A) + \varphi(A)p(A) = I_n \Longrightarrow \varphi(A)\cdot p(A) = I_n$

και άρα $\varphi(A)$ είναι αντιστρ. με αντίστροφο τον $p(A)$