Φυλλάδιο 4

1 1) Παρατηρούμε ότι ο $f(b_1)=b_1$, $f(b_2)=2b_2$ και $f(b_3)=-b_3$ όπου η βάση B του V είναι $B=\{b_1, b_2, b_3\}$.

f-αναλλοίωτοι υπόχωροι:

1) 0, V.

2) Μονοδιάστατοι: $W=\langle w\rangle$ είναι f-αναλ. ανν $f(w)=\gamma w$

δηλ. ανν W είναι γ-ιδιόχωρος του f.

Άρα έχουμε 3 μονοδιάστατους τους $V_1=\langle b_1\rangle$, $V_2=\langle b_2\rangle$ και $V_3=\langle b_3\rangle$. (V_1 ο 1-ιδιόχωρος, V_2 ο 2-ιδιόχωρος, V_3 ο -1-ιδιόχ

3) Διδιάστατοι: Έστω W f-αναλ. με $\dim W=2$ τότε για του $f_W: W\to W$ έχουμε δείξει ότι m_{f_W} / m_f

Αλλά $m_f(x)=(x-1)(x-2)(x+1)$ (γιατί;)

Άρα $m_{f_W}(x)=\begin{cases} \text{είτε } (x-1)(x-2) \\ \text{είτε } (x+1)(x-2) \\ \text{είτε } (x-1)(x+1) \end{cases}$ και επομένως

f_W διαγωνιοποιήσιμος με ιδιοτιμές $\begin{cases} \text{είτε } 1, 2 \\ \text{είτε } -1, 2 \\ \text{είτε } 1, -1 \end{cases}$

Επομένως (γιατί;) $W=V_1\oplus V_2$, είτε $W=V_3\oplus V_2$ είτε $W=V_1\oplus V_3$.

2) Αν $\hat{e}$ η κανονική βάση του $\mathbb{C}^2$

τότε $[T]_{\hat{e}}^{\hat{e}}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$ και άρα ο T είναι ιδιοτιμές $0, 1$

και αντίστοιχους ιδιόχωρους τους $V_1=\langle \binom{1}{0}\rangle$, $V_2=\langle\binom{0}{1}\rangle$

(V_1 ο 0-ιδιόχωρος και V_2 ο 1-ιδιόχ.)

Επομένως οι T-αναλλοίωτοι υπόχωροι του $\mathbb{C}^2$ είναι

(γιατί; τι πιθανές διαστάσεις έχουμε γνωστούς;)

0, $\mathbb{C}^2$, V_1, V_2.

2 i). $f(f-1_V)=-1_V \Rightarrow f(1_V-f)=1_V$ άρα f αντιστ. και αντίστροφος ο 1_V-f.

ii) T αντιστρ. $\Rightarrow 0$ δεν είναι ιδιοτιμή του άρα
$m_T(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\dots+\alpha_{k-1}x^{k-1}+x^k$, με $\alpha_0\neq 0$.

Άρα $0=m_T(T)=\alpha_0 I_n+\alpha_1 T+\dots+\alpha_{k-1}T^{k-1}+T^k$, $\alpha_0\neq 0$

$\Rightarrow -\alpha_0 I_n = T(\alpha_1 I_n+\alpha_2 T+\dots+\alpha_{k-1}T^{k-2}+T^{k-1})$

$\underset{\alpha_0\neq 0}{\Rightarrow} I_n = T\cdot \underbrace{\frac{-1}{\alpha_0}(\alpha_1 I_n+\alpha_2 T+\dots+\alpha_{k-1}T^{k-2}+T^{k-1})}_{=T^{-1}}$

A.

Άρα $T^{-1}=-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}I_n-\frac{\alpha_2}{\alpha_0}T-\dots-\frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_0}T^{k-2}-\frac{1}{\alpha_0}T^{k-1}=$
$=p(T)$

3 Έστω $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ βάση του V
Τότε $V_i=\langle v_i\rangle$ είναι μονοδιάστατοι υπόχωροι του V και άρα T-αναλλοίωτοι. Επομένως $\forall i=1,\dots,n$ υπάρχει $\lambda_i\in\mathbb{F}$ ώστε $T(v_i)=\lambda_i v_i$ (γιατί;).
Επίσης και ο $W=\langle v_1+\dots+v_n\rangle$ είναι υπόχωρος του V και άρα T-αναλ. Επομένως $T(v_1+\dots+v_n)=\mu(v_1+\dots+v_n)$ για κάποιο $\mu\in\mathbb{F}$.
Αλλά $T(v_1+\dots+v_n)=T(v_1)+\dots+T(v_n)=\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n$
Άρα $\mu v_1+\dots+\mu v_n=\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n \underset{v_i \text{ ανεξάρτητα}}{\Rightarrow} \mu-\lambda_i=0$, $\forall i=1,\dots,n$

και άρα $\lambda_i=\mu$, $\forall i=1\dots n$
Άρα $T(v_i)=\mu v_i$ για κάθε i και επομένως $T(v)=\mu\cdot v$
Συμπ. $T=\mu\cdot I_V$.

4 i) $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, $\chi_A(x)=\begin{vmatrix}-x&0&1\\1&-x&0\\0&1&-x\end{vmatrix}=-x^3-1=-(x^3+1)=$
$=-(x+1)(x^2-x+1)$

Πάνω από το $\mathbb{R}$ το x^2+x+1 δεν έχει ρίζες ενώ στο $\mathbb{C}$ γίνεται $x^2+x+1=(x-\zeta)(x-\zeta^2)$ όπου ζ πρωταρχική κυβική ρίζα του 1.

Άρα $m_A(x)=(x+1)(x^2+x+1)$ και επομένως πάνω από το $\mathbb{R}$ ο A δεν διαγωνιοποιείται ενώ πάνω από το $\mathbb{C}$ είναι διαγων. και μοιάζει όμοιος με τον

$$D_A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$$

ii) $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_B(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & 1 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = -x^3$

Δείτε ότι $m_B(x) = x^2$ (γιατί;) Επομένως ο B δεν διαγωνιοποιείται πάνω από το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$. (γιατί;

iii) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\chi_C(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = -x(1-x)^2 = -x(x-1)^2$

Δείτε ότι $m_C(x) = x(x-1)$ (γιατί;)

Δείτε ότι ... πάνω από το $\mathbb{R}$ και το $\mathbb{C}$ (γιατί;).

Επομένως ο C διαγωνιοπ. πάνω από το $\mathbb{R}$ και το $\mathbb{C}$ (γιατί;).

5 Αν $A = [f]$ και $B = [g]$ οι πίνακες των f και g ως προς τις κανονικές βάσεις έχουμε

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ για $x, y, z, w \in \mathbb{C}$.

Άρα $f \circ g = g \circ f$ οπότε $AB = BA \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha+\gamma & \beta+\delta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha+\beta \\ \gamma & \gamma+\delta \end{bmatrix}$

Επομένως $\gamma = 0$ και $\alpha = \delta$. Άρα $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Επομένως $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} = \beta \cdot A + (\alpha - \beta) I_2 = \begin{bmatrix} \beta & \beta \\ 0 & \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha-\beta & 0 \\ 0 & \alpha-\beta \end{bmatrix}$

Άρα $g = p(f)$ όπου $p(x) = \beta x + (\alpha - \beta) \in \mathbb{C}[x]$.