Σύντομες λύσεις - Υποδείξεις - Φυλλάδιο 9. ①

Σελ. 134

$\boxed{2}$ $A = A^2$ άρα $m_A(x) / x^2 - x = x(x-1)$.

$\boxed{1}$ $m_A(x) = x$ τότε $A = O_{5\times 5}$

$\boxed{2}$ $m_A(x) = x - 1$ τότε $A = I_5$

$\boxed{3}$ $m_A(x) = x(x-1)$ τότε A είναι όμοιος με έναν από τους

$$\begin{bmatrix} 0 &&&& \\ & 1 &&& \\ && 1 && \\ &&& 1 & \\ &&&& 1 \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{bmatrix} 0 &&&& \\ & 0 &&& \\ && 1 && \\ &&& 1 & \\ &&&& 1 \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{bmatrix} 0 &&&& \\ & 0 &&& \\ && 0 && \\ &&& 1 & \\ &&&& 1 \end{bmatrix} \text{ ή } \begin{bmatrix} 0 &&&& \\ & 0 &&& \\ && 0 && \\ &&& 0 & \\ &&&& 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{3}$ $\chi_A(x) = (x-1)^2(x-2)^4$ άρα η κανονική μορφή

1. $m_A(x) = (x-1)(x-2)$ τότε $A \sim \begin{bmatrix} 1 &&&&& \\ & 1 &&&& \\ && 2 &&& \\ &&& 2 && \\ &&&& 2 & \\ &&&&& 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{1,1} &&&&& \\ & J_{1,1} &&&& \\ && J_{2,1} &&& \\ &&& J_{2,1} && \\ &&&& J_{2,1} & \\ &&&&& J_{2,1} \end{bmatrix}$

2. $m_A(x) = (x-1)^2(x-2)$ τότε $A \sim \begin{bmatrix} J_{1,2} &&&& \\ & J_{2,1} &&& \\ && J_{2,1} && \\ &&& J_{2,1} & \\ &&&& J_{2,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 &&&& \\ & 1 &&&& \\ && 2 &&& \\ &&& 2 && \\ &&&& 2 & \\ &&&&& 2 \end{bmatrix}$

3. $m_A(x) = (x-1)(x-2)^2$ τότε

$A \sim \begin{bmatrix} J_{1,1} &&& \\ & J_{1,1} && \\ && J_{2,2} & \\ &&& J_{2,2} \end{bmatrix}$ ή $A \sim \begin{bmatrix} J_{1,1} &&&& \\ & J_{1,1} &&& \\ && J_{2,2} && \\ &&& J_{2,1} & \\ &&&& J_{2,1} \end{bmatrix}$

4. $m_A(x) = (x-1)^2(x-2)^2$ τότε

$A \sim \begin{bmatrix} J_{1,2} && \\ & J_{2,2} & \\ && J_{2,2} \end{bmatrix}$ ή $A \sim \begin{bmatrix} J_{1,2} &&& \\ & J_{2,2} && \\ && J_{2,1} & \\ &&& J_{2,1} \end{bmatrix}$

5. $m_A(x) = (x-1)(x-2)^3$ τότε $A \sim \begin{bmatrix} J_{1,1} &&& \\ & J_{1,1} && \\ && J_{2,3} & \\ &&& J_{2,1} \end{bmatrix}$

6. $m_A(x) = (x-1)^2(x-2)^3$ τότε $A \sim \begin{bmatrix} J_{1,2} && \\ & J_{2,3} & \\ && J_{2,1} \end{bmatrix}$

7. $m_A(x) = (x-1)(x-2)^4$ τότε $A \sim \begin{bmatrix} J_{1,1} && \\ & J_{1,1} & \\ && J_{2,4} \end{bmatrix}$

$\underline{8}$ $m_A(x)=(x-1)^2(x-2)^4$ τότε $A \sim \begin{bmatrix} J_{1,2} & \\ & J_{2,4} \end{bmatrix}$

$\boxed{4}$ A θα είναι όμοιος με ακριβώς έναν από τους ακόλουθους (που είναι σε μορφή Jordan) (γιατί;) και των οποίων το $\chi_A(x)$ είναι.

1) $\chi_A(x)=(x-1)^3(x+1)^3$ και $A \sim \begin{bmatrix} J_{1,2} & & & \\ & J_{1,1} & & \\ & & J_{-1,2} & \\ & & & J_{-1,1} \end{bmatrix}$.

B) $\chi_A(x)=(x-1)^4(x+1)^2$ και

$A \sim \begin{bmatrix} J_{1,2} & & \\ & J_{1,2} & \\ & & J_{-1,2} \end{bmatrix}$ ή $A \sim \begin{bmatrix} J_{1,2} & & & \\ & J_{1,1} & & \\ & & J_{1,1} & \\ & & & J_{-1,2} \end{bmatrix}$

ή

C) $\chi_A(x)=(x-1)^2(x+1)^4$ και

$A \sim \begin{bmatrix} J_{1,2} & & \\ & J_{-1,2} & \\ & & J_{-1,2} \end{bmatrix}$ ή $A \sim \begin{bmatrix} J_{1,2} & & & \\ & J_{-1,2} & & \\ & & J_{-1,1} & \\ & & & J_{-1,1} \end{bmatrix}$.

$\boxed{5}$ A είναι όμοιος με ακριβώς έναν από τους

$\begin{bmatrix} J_{1,3} & \\ & J_{1,3} \end{bmatrix}$ ή $\begin{bmatrix} J_{1,3} & & \\ & J_{1,2} & \\ & & J_{1,1} \end{bmatrix}$ ή $\begin{bmatrix} J_{1,3} & & & \\ & J_{1,1} & & \\ & & J_{1,1} & \\ & & & J_{1,1} \end{bmatrix}$.

$\boxed{6}$. $\underline{\text{π.χ.}}$ $A=\begin{bmatrix} J_{2,2} & \\ & J_{3,2} \end{bmatrix}$

$\boxed{10}$ Έγινε στην τάξη.

1. Αρκεί να δείξουμε ότι όλοι οι πίνακες της μορφής

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & 0 & a_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{n\times n} \quad \text{με } a_{1,2} \neq 0 \neq a_{2,3} \ldots a_{n-1,n} \neq 0$$

έχουν ίδια μορφή Jordan.

Έστω A τέτοιος πίνακας. Τότε $\operatorname{rank} A = n-1$ (γιατί;)

Άρα $\dim(\operatorname{Ker} A) = 1$. Επίσης $\chi_A(x) = (-1)^n x^n$.

Άρα (γιατί;) $A \sim J_{0,n}$.

Δηλ. όλων αυτών των πινάκων η μορφή Jordan είναι

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} = J_{0,n}.$$