Γραμμική ΙΙΙ, Χειμερινό 2013
Φυλλάδιο 5
Υποδείξεις

- Έστω $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ γραμμική απεικόνιση τέτοια ώστε $T^2 = I$
  1) $x \in Im(1/2(I+T)) \Rightarrow T(x) = x$
  2) $x \in Im(1/2(I-T)) \Rightarrow T(x) = -x$
  3) Αν $T \neq \pm I \Rightarrow \exists x_1, x_2$ μη μηδενικά γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα στον $\mathbb{R}^2$ με $T(x_1) = x_1$ και $T(x_2) = -x_2$
  4) Έστω A ένας 2×2 πίνακας τ.ω. $A^2 = I_2$. Αν $A \neq \pm I_2$ τότε είναι όμοιος με τον
  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

  Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι $T \circ (I+T) = T + I$ και $T \circ (I-T) = T - I$. Αν $a \in \mathbb{R}^2$ με $1/2(I+T)(a) = x$ τότε $[1/2T \circ (I+T)](a) = T(x)$ και άρα $x = 1/2(T+I)(a) = [1/2T \circ (I+T)](a) = T(x)$. Ανάλογα για το 2). 3) Αν $T \neq \pm I$ τότε η εικόνες των απεικονίσεων $1/2(I+T)$ και $1/2(I-T)$ είναι μη μηδενικές. Επομένως (απο 1,2) υπάρχουν μη μηδενικά διανύσματα $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ με $T(x_1) = x_1$ και $T(x_2) = -x_2$. Άρα τα x_1, x_2 είναι ιδιοδιανύσματα της T για τις ιδιοτιμές 1 και -1. Επομένως είναι γραμ. ανεξάρτητα (γιατί;). Το 4) προκύπτει άμεσα απο το 3). Αν T η γραμμική απεικόνιση που αντιστοιχεί στον A, τότε ως προς την βάση $B = \{x_1, x_2\}$ του $\mathbb{R}^2$ ο πίνακας της T είναι ο $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ και άρα (γιατί;) είναι όμοιος με τον A.

- Από το βιβλίο Εισαγωγή στην Γραμμική άλγεβρα, Τόμος Β' σελίδα 51–52, δείτε τις (2A), 5, 7, 9, 10, 13, 14.

  - Υποδειξη για την 7 Αν A ιδιοδιάνυσμα της f για την ιδιοτιμη λ (ο A είναι ν επι ν πίνακας) τότε $A \neq \nvdash$ και ισχύει $f(A) = \lambda A$ Άρα $A^t = \lambda A$ και επομένως $(A^t)^t = \lambda A^t$ που δίνει $A = \lambda \lambda A$. Επομένως $\lambda = \pm 1$. Αυτές είναι πιθανές ιδιοτιμές. Για να δείξετε ότι πραγματικά είναι ιδιοτιμές βρείτε μη μηδενικούς πίνακες A, B ώστε $f(A) = A$ και $f(B) = -B$
  - Υπόδειξη για την 9 Λ, Λ, Λ, Σ, Λ, Λ
  - Υπόδειξη για την 10 Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A θα είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων σαν πολυώνυμο του $\mathbb{C}$....... (Δώστε παράδειγμα με πίνακα πάνω από το $\mathbb{R}$ για τον οποίο η άσκηση δεν ισχύει.)
  - Υπόδειξη για την 13 Αν $f(v) = \lambda v$ τότε (δείτε γιατί) $f(g(v)) = g(f(v)) = g(\lambda v) = \lambda g(v)$. Άρα...