

Θεωρία Ομάδων, Χειμερινό 2014 Υποδείξεις Ασκήσεων

1. Σωστό ή Λάθος

- 1) Οποιοσδήποτε δύο ομάδες με τρία στοιχεία είναι ισόμορφες.
- 2) Σε κάθε κυκλική ομάδα, κάθε στοιχείο είναι γεννήτορας.
- 3) Κάθε κυκλική ομάδα έχει τουλάχιστον μία μη τετριμμένη γνήσια υποομάδα.
- 4) Η $G = \{1, i, -1, -i\}$ με πράξη τον πολ/μο είναι ομάδα ισόμορφη με την Z_4 .
- 5) Κάθε κυκλική ομάδα είναι αβελιανή.
- 6) Η Z_7^* είναι κυκλική.
- 7) Μία αβελιανή ομάδα μπορεί να έχει μία μη αβελιανή υποομάδα.
- 8) Για κάθε n υπάρχει αβελιανή ομάδα τάξης n .
- 9) Για κάθε n υπάρχει μη αβελιανή ομάδα τάξης n .

2. Βρείτε τις τάξεις των παρακάτω στοιχείων στην ομάδα που δίνεται:

- 1) $(123)(124)$ στην S_5 .
- 2) a^{45} στην $G = \langle a \mid a^{140} = 1 \rangle$
- 3) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ στην $GL_2(\mathbb{R})$.

3. 1) Αν τα στοιχεία a, b, ab μιας ομάδας G έχουν τάξη 2 τότε $ab = ba$.

2) Αν η ομάδα G ικανοποιεί $x^2 = e$ για κάθε $x \in G$, δείξτε ότι η G είναι αβελιανή.

4. Δείξτε ότι μια κυκλική ομάδα με έναν μόνο γεννήτορα μπορεί να έχει το πολύ δύο στοιχεία.

5. Δείξτε ότι τα στοιχεία ab και ba , με $a, b \in G$ έχουν ίδια τάξη.

Το ίδιο συμβαίνει και για τα στοιχεία a και $c^{-1}ac$.

6. Δείξτε ότι μια ομάδα άρτιας τάξης περιέχει περιττό πλήθος στοιχείων τάξης 2.

7. Αν $x \in G$ έχει τάξη mn με $(m, n) = 1$, δείξτε ότι υπάρχουν y, z με $x = yz$ τέτοια ώστε y, z αντιμετατίθενται και έχουν τάξεις m και n αντίστοιχα.

8. Αν $H \subseteq G$, πεπερασμένο μη κενό υποσύνολο ομάδας G , δείξτε ότι είναι υποομάδα αν και μόνο αν ικανοποιεί $g * h \in H$ για κάθε $g, h \in H$.