

**Θ. Ομάδων, Χειμερινό 2014**  
Φυλλάδιο 10

1. Δείξτε ότι κάθε ομάδα τάξης 28 έχει κανονική υποομάδα τάξης 7.
2. Δείξτε ότι δεν υπάρχουν απλές ομάδες τάξης 96, 132 ή 150.
3. Αν  $p \neq q$  διαφορετικοί πρώτοι δείξτε ότι κάθε ομάδα τάξης  $p^2q$  έχει μη τετριμμένη κανονική υποομάδα.
4. Αν  $G$  πεπερασμένη ομάδα και  $H$  υποομάδα της, δείξτε ότι  $\cup_{g \in G} gHg^{-1} \neq G$ .
5. Έστω  $G$   $p$ -ομάδα με  $|G| = p^n$ . Αν  $H \leq G$  με  $|H| = p^{n-1}$ , δείξτε ότι η  $H$  είναι κανονική υποομάδα της  $G$ . Επομένως κάθε  $G$  ομάδα τάξης  $p^n$ , με  $p$  πρώτο, περιέχει κανονική υποομάδα τάξης  $p^{n-1}$ . Υποδ. Θεωρήστε την δράση της  $H$  στο σύνολο των αριστερών συμπλόκων  $X = \{xH \mid x \in G\}$  όπου  $h * xH = (hx)H$ .
- 6.\* Δείξτε ότι δεν υπάρχουν απλές ομάδες τάξης 90