

Θ. Ομάδων, Χειμερινό 2014
Φυλλάδιο 2

1. Σωστό η Λάθος

- 1) Κάθε πεπερασμένη ομάδα είναι κυκλική
- 2) Κάθε άπειρη ομάδα είναι κυκλική
- 3) Υπάρχει κυκλική με ένα μόνο γεννήτορα
- 4) Υπάρχει άπειρη κυκλική με 4 γεννήτορες
- 5) Υπάρχει πεπερασμένη κυκλική με 4 γεννήτορες
- 6) Αν G ομάδα ώστε κάθε γνήσια υποομάδα της είναι κυκλική τότε και η G είναι κυκλική
- 7) Αν G κυκλική και $m \mid |G|$ τότε υπάρχει υποομάδα τάξης m
- 8) Αν G ομάδα και $m \mid |G|$ τότε υπάρχει υποομάδα τάξης m

- 9) Η υποομάδα της πολ/κής ομάδας των 4×4 αντιστρέψιμων πινάκων που παράγεται από τον

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

έχει τάξη 3. 10) Η A_3 είναι αβελιανή ομάδα.

- 11) Η A_5 έχει 120 στοιχεία.
- 12) Η S_7 είναι ισόμορφη με την υποομάδα όλων των μεταθέσεων της S_8 που αφήνουν το 8 σταθερό.
- 13) Η S_7 είναι ισόμορφη με την υποομάδα όλων των μεταθέσεων της S_8 που αφήνουν το 6 σταθερό.

2. Αν μπερδεύσετε με υποομάδες, μία πρακτική εξάσκηση αποτελεί η άσκηση 13 από το βιβλίο του Fraleigh σελ.68

3. Δείξτε ότι η S_n παράγεται από τις $(1, 2 \cdots n)$ και $(1, 2)$.

4. Αν H υποομάδα της S_n (με $n \geq 2$) δείξτε ότι είτε $H \leq A_n$ είτε ακριβώς οι μισές μεταθέσεις της H είναι άρτιες (και άρα οι άλλες μισές περιττές).

5. 1) Αν G ομάδα και $a \in G$ στοιχείο της δείξτε ότι το σύνολο $G_a = \{x \in G \mid xa = ax\}$ είναι υποομάδα της G .

2) Αν G αβελιανή και $a \in G$ υπολογίστε την G_a .

2) Αν $G = S_4$ και $a = (1, 2)$ υπολογίστε την G_a .

Η G_a συμβολίζεται και $C_G(a)$ και θα μας αποσχολήσει αρκετά και στο μέλλον.

6. Έστω G ομάδα και $T = \{g^n \mid g \in G\}$. Τι πρέπει να υποθέσουμε για την G ώστε να μπορούμε να δείξουμε ότι η T είναι υποομάδα της G ;

7. Δείξτε ότι μια ομάδα με πεπερασμένο πλήθος υποομάδων είναι πεπερασμένη.