

Θ. Ομάδων, Χειμερινό 2014
Φυλλάδιο 3

1. Σωστό η Λάθος

Έστω $H \leq G$ και $a, b \in G$.

- 1) Αν $aH = bH$ τότε $Ha = Hb$.
- 2) Αν $Ha = Hb$ τότε $b \in Ha$.
- 3) Αν $aH = bH$ τότε $Ha^{-1} = Hb^{-1}$.
- 4) Αν $aH = bH$ τότε $a^2H = b^2H$.
- 5) Το πλήθος των αριστερών σύμπλοκων της H διαιρεί την τάξη της G .
- 6) Κάθε υποομάδα μιας ομάδας είναι αριστερό σύμπλοκο του εαυτού της.
- 7) Υπάρχει ομάδα G τάξης 6 που περιέχει υποομάδα της οποίας τα αριστερά σύμπλοκα δίνουν διαμέριση της G σε 6 υποσύνολα.
- 8) Υπάρχει ομάδα G τάξης 6 που περιέχει υποομάδα της οποίας τα αριστερά σύμπλοκα δίνουν διαμέριση της G σε 4 υποσύνολα.

2. Βρείτε όλα τα σύμπλοκα της $\langle 4 \rangle$ στην $\mathbf{Z}_{12}$.

3. 1) Βρείτε τις υποομάδες της $\mathbf{Z}_{36}$ και φτιάξτε το δικτυωτό διάγραμμα των υποομάδων της.

2) Αν p, q πρώτοι, βρείτε το πλήθος των γεννητόρων της $\mathbf{Z}_{pq}$.

4. Αν G έχει τάξη pq , με p, q πρώτοι αριθμοί. Δείξτε ότι κάθε γνήσια υποομάδα της G είναι κυκλική.

5. Θεωρήστε την υποομάδα H της $GL_2(\mathbf{Z})$ που παράγεται από τα στοιχεία

$$a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ και } b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

δηλαδή $H = \langle a, b \rangle$. Δείξτε ότι το a έχει τάξη 4 ενώ το b έχει τάξη 3. Είναι η H πεπερασμένη; (Ποιά η τάξη του ab ;)

6. Αν A, B είναι πεπερασμένες υποομάδες μιας ομάδας G που έχουν τάξεις με $(|A|, |B|) = 1$ τότε $A \cap B = \{e\}$.

7. Έστω A, B κυκλικές υποομάδες μιας αβελιανής ομάδας G με τάξεις $|A| = r$ και $|B| = s$. Δείξτε ότι αν $(r, s) = 1$ τότε η G έχει κυκλική υποομάδα τάξης rs .

8.* Μία ομάδα έχει ακριβώς 3 υποομάδες αν και μόνο αν είναι κυκλική τάξης p^2 όπου p είναι πρώτος.