

## Θ. Ομάδων, Χειμερινό 2014

Φυλλάδιο 5

1. Αν  $T$  είναι η ομάδα των 12-στών ριζών του 1 και  $N$  η υποομάδα της που παράγεται από το  $-1$ , ποιά ομάδα είναι η  $T/N$ ;

2. Αν  $N$  κανονική υποομάδα της  $G$  και  $a \in G$  τάξης  $m$ , δείξτε ότι η τάξη του  $aN$  στην  $G/N$  είναι διαιρέτης του  $m$ .

3. Έστω  $N$  κανονική υποομάδα της  $G$  και  $H$  υποομάδα της  $G$ . Δείξτε ότι

1) Το γινόμενο  $HN$  ορίζεται και είναι επίσης υποομάδα της  $G$ .

2) Η ομάδα  $\langle H, N \rangle$  που παράγεται από τις  $H$  και  $N$  ισούται με την  $HN$ .

4. Έστω  $N, M$  κανονικές υποομάδες μιας ομάδας  $G$ . Δείξτε ότι:

1)  $N \cap M$  είναι κανονική υποομάδα της  $G$

2)  $NM$  είναι κανονική υποομάδα της  $G$

3) Αν  $N \cap M = \{e\}$  τότε για κάθε  $n \in N$  και  $m \in M$  ισχύει  $nm = mn$ .

5. Έστω  $G$  το σύνολο των  $2 \times 2$  πραγματικών πινάκων  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$  με  $ad \neq 0$  και πράξη τον πολ/μο. Αν

$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{R} \right\}$  δείξτε ότι

α)  $N$  είναι κανονική υποομάδα της  $G$

β)  $G/N$  είναι αβελιανή

6. Αν  $N$  είναι μια κανονική υποομάδα της  $G$  τέτοια ώστε  $|G : N|$  και  $|N|$  είναι πρώτοι μεταξύ τους, δείξτε ότι αν κάποιο στοιχείο  $x \in G$  ικανοποιεί  $x^{|N|} = e$ , τότε  $x \in N$ .

7. Έστω  $G = D_4$  η ομάδα των συμμετριών του τετραγώνου. Βρείτε το κέντρο  $Z$  της  $D_4$  και προσδιορίστε την ομάδα πηλίκο  $G/Z$ .