Θ. Ομάδων, Χειμερινό 2014

Φυλλάδιο 6

1. Στην ομάδα $G = \mathbb{Z}_{36}$ έστω $H =< 6 >$ και $N =< 9 >$. Δώστε τα στοιχεία των παρακάτω ομάδων και προσδιορίστε τις:
G/N, G/H, HN, $H \cap N$, HN/N, $H/(H \cap N)$.

2. Έστω $\phi : \mathbb{Z}_{20} \to \mathbb{Z}_{12}$ ομομορφισμός. Ποιές είναι οι δυνατές τιμές του μεγέθους της εικόνας $|\phi(\mathbb{Z}_{20})|$ και του πυρήνα $|\operatorname{Ker}(\phi)|$;

3. Προσδιορίστε τις παρακάτω ομάδες πηλίκο
1) $(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8)/ < (1, 2, 4) >$
2) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/ < (2, 2) >$
3) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/ < (2, 1) >$
4) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_8)/ < (3, 2) >$

4. Αν G ομάδα και $g \in G$ σταθερό στοιχείο της, δείξτε ότι η απεικόνιση $f : G \to G$ που ορίζεται σαν $f(x) = gxg^{-1}$ είναι αυτομορφισμός της G (δηλαδή είναι ισομορφισμός από την G στην G). Αυτοί οι αυτομορφισμοί της G ονομάζονται εσωτερικοί αυτομορφισμοί και συμβολίζονται σαν $\operatorname{Inn}(G)$. (Στην τάξη θα μιλήσουμε επιπλέον για αυτούς και την σχέση τους με το κέντρο $Z(G)$.)

5.Μια υποομάδα H μιας ομάδας G ονομάζεται χαρακτηριστική αν $F(H) \leq H$ για κάθε αυτομορφισμό F της G. Δείξτε ότι
1) Αν H χαρακτηριστική τότε είναι και κανονική.
2) Το αντίστροφο του 1) δεν ισχύει.