Θ. Ομάδων, Χειμερινό 2014

Φυλλάδιο 7

1.(Αυτό το πρόβλημα θα γίνει και αναλυτικά στην τάξη σαν θεωρία). Σε κάθε ομάδα G ορίζουμε την υποομάδα $G' = \{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G\}$. Η G' ονομάζεται αντιμεταθέτρια υποομάδα (commutator subgroup) της G και παίζει πολύ σπουδαίο ρόλο στην θ. ομάδων.
1) Δείξτε ότι G' είναι χαρακτηριστική υποομάδα της G (και άρα κανονική).
2) Δείξτε ότι G/G' είναι αβελιανή.
3) Αν $N \trianglelefteq G$ με G/N αβελιανη δείξτε ότι $G' \leq N$.
4) Αν $H \leq G$ και $G' \leq H$ δείξτε ότι $H \trianglelefteq G$.

2. Βρείτε τις παρακάτω ομάδες αυτομορφισμών:
1) $\mathrm{Aut}(Z_{10})$, $\mathrm{Aut}(Z_{11})$
*2) $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2)$, $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_3)$.
Για τις παραπάνω ομάδες βρείτε την ομάδα των εσωτερικών αυτομορφισμών $\mathrm{Inn}(G)$.

3. Έστω $D_n = \{a, b \mid a^n = 1 = b^2, ba = a^{-1}b\}$ η διεδρική ομάδα τάξης $2n$. Δείξτε ότι
1) Η υποομάδα $N =< a >= \{1, a, a^2, \cdots a^{n-1}\}$ είναι κανονική υποομάδα της G.
2) $G/N \cong \mathbb{Z}_2$
3) Βρείτε το κέντρο $Z(D_n)$.

4. Έστω G ομάδα και f ένας αυτομορφισμός της. Αν $N \trianglelefteq G$ τέτοια ώστε $f(N) \subseteq N$ δείξτε ότι μπορείτε με χρήση του f να ορίσετε ένα αυτομορφισμό της G/N.
5. Δείξτε ότι κάθε πεπερασμένη ομάδα με περισσότερα από 2 στοιχεία έχει αυτομορφισμό $T \neq I$ (όπου I ο τετριμμένος αυτομορφισμός δηλ. $I(x) = x$, για κάθε $x \in G$.