

Θ. Ομάδων, Χειμερινό 2014

Φυλλάδιο 9

1. Έστω X ένα σύνολο και G μια ομάδα που δρά στο X . Αν $x, y \in X$ ανήκουν στην ίδια τροχιά τότε $C_G(x)$ και $C_G(y)$ είναι συζυγείς υποομάδες της G .
2. Βρείτε το πλήθος των τροχιών του $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \}$ κάτω από την δράση της υποομάδας της S_8 που παράγεται από
 - α) το (1246)
 - β) τα (12) και (247)
3. Βρείτε το πλήθος των διαφορετικών τετραγώνων που μπορούμε να φτιάξουμε αν βάψουμε τις ακμές τους και έχουμε στη διάθεσή μας 10 χρώματα και επιπλέον
 - α) μπορούμε να χρησιμοποιούμε το ίδιο χρώμα σε παραπάνω από μία πλευρά,
 - β) δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο χρώμα σε 2 πλευρές.
4. Χρωματίζουμε ξύλινους κύβους, και έχουμε στη διάθεσή μας 10 χρώματα. Βρείτε το πλήθος των διαφορετικών κύβων που μπορούμε να φτιάξουμε αν βάψουμε κάθε έδρα με διαφορετικό χρώμα.
5. Δείξτε ότι κάθε ομάδα τάξης 15 είναι κυκλική.
6. Αν $|G| = p^n$ όπου p είναι πρώτος, και $N \trianglelefteq G$, δείξτε ότι $N \cap Z(G) \neq \{1\}$.
- 7.* Αν G μία p -ομάδα, δηλ. η τάξη της G είναι p^n για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, όπου p είναι πρώτος αριθμός, δείξτε ότι η G έχει υποομάδα τάξης p^m για κάθε $m = 0, 1, \dots, n$.