Θεμέλια των Μαθηματικών
Χειμερινό 2016, Θ. Γαρεφαλάκης, Μ. Λουκάκη
Φυλλάδιο 12

Μερικές επαναληπτικές ασκήσεις από παλιότερα διαγωνίσματα.

1. Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι Λάθος; Γιατί;
   1) Αν $\{2,3,4\} \subseteq A$ τότε $2 \in A$ και $\{3,4\} \subseteq A$.
   2) Αν $\{2,3,4\} \in A$ και $\{2,3\} \in B$ τότε $\{4\} \subseteq A \setminus B$
   3) Αν $\{2,3,4\} \subseteq A \cap B$ τότε $\{2,3,4\} \subseteq A$ και $\{2,3,4\} \subseteq B$
   4) Αν $\{3,4\} \subseteq A \setminus B$ και $\{1,2\} \subseteq B$ τότε $\{1,2,3,4\} \subseteq A \cup B$
   5) Αν $\{2,3\} \subseteq A \cup B$ και $\{2,3\} \cap A = \emptyset$ τότε $\{2,3\} \subseteq B$.

2. Δείξτε ότι $A \cap (B \setminus C) = (A \setminus B^c) \cap (A \setminus C)$.

3. 1)Αν $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, υπολογίστε το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(A)$.
   2)Αν A, B σύνολα δείξτε ότι $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$ αν και μόνο αν $A = B$.

4. . Θεωρούμε την πρόταση: Ο μοναδικός πραγματικός αριθμός x με $x \geq 0$ και x μικρότερος από κάθε πραγματικό θετικό αριθμό είναι το 0.
   1) Γράψτε την παραπάνω πρόταση σε συμβολική μαθηματική γλώσσα. Επίσης γράψτε την άρνησή της
   2) Αποδείξτε την πρόταση.

5. Γράψτε σε συμβολική γλώσσα την άρνηση της πρότασης : για κάθε $p < q$ περιττούς πρώτους υπάρχουν θετικοί ακέραιοι $r < s$ που δεν είναι πρώτοι και ικανοποιούν $p^2 + q^2 = r^2 + s^2$. (Χρησιμοποιήστε τα σύμβολα $\mathcal{P}$ για το σύνολο των πρώτων και $\mathbb{Z}^+$ για για το σύνολο των θετικών ακεραίων.)

6. Δείξτε με επαγωγή τις παρακάτω ισότητες
$$\sum_{i=1}^{n+1} i2^i = n2^{n+2} + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

7. Δείξτε με επαγωγή ότι για κάθε πραγματικό αριθμό $0 < x < 1$ και κάθε φυσικό $n \geq 2$, ισχύει
$$(1-x)^n \leq 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

8. Αν ξέρετε ότι η σχέση $p \to q$ είναι ψευδής, τί είναι οι παρακάτω, Ψ ή Α γιατί;
   α) $p \wedge q$
   β) $p \vee q$
   ς) $q \to p$.

9. 1) Αν ξέρετε ότι οι προτάσεις p και q έχουν συγχρόνως τις ίδιες τιμές αληθείας (Α ή Ψ). Τι συμπέρασμα βγάζετε για την συνεπαγωγή $p \to q$;
   2) Εξετάστε αν η προτάση $(p \wedge \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge r$ είναι ταυτολογία αντίφαση ή τίποτα από τα δύο.
   3) Δείξτε ότι αν $p \to q$ και $q \to r$ είναι αληθείς προτάσεις τότε και η $p \to r$ είναι αληθής.

10. A) Εστω ρ μία σχέση ορισμένη στο σύνολο A. Πότε η ρ είναι
α)συμμετρική, β) ανακλαστική και γ) μεταβατική; (δώστε τους ορισμούς).
B) Στο $\mathbb{R}$ ορίζουμε την σχέση

$$x \sim y \text{ αν και μόνο αν } x^2 - y^2 \in \mathbb{Z}$$

Είναι σχέση ισοδυναμίας; Αν είναι δώστε 2 διαφορετικές κλάσεις της και από 3 στοιχεία στην κάθε κλάση.

11. Εξετάστε αν οι παρακάτω σχέσεις στο $\mathbb{R}$ είναι σχέσεις ισοδυναμίας:
α) $x \sim y$ αν και μόνο αν $x - y \in \mathbb{Q}$.
β) $x \sim y$ αν και μόνο αν $x - y \notin \mathbb{Q}$.
Αν κάποια είναι σχέση ισοδυναμίας δώστε 2 διαφορετικές κλάσεις και 3 στοιχεία σε κάθε μία.

12. Ο Κώστας βρίσκεται μαζί με άλλα 7 άτομα. Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε μια επιτροπή 2 ατόμων με πρόεδρο και αντιπρόεδρο, από αυτούς τους 8, αν ο μόνος τρόπος να είναι ο Κώστας στην επιτροπή είναι να είναι πρόεδρος;

13. A) Με πόσους τρόπους μπορώ να βάλω στην σειρά 6 αριθμημένες μπάλες εκ των οποίων 4 είναι μαύρες και 2 κόκκινες αν θέλω όλες οι μαύρες να είναι μαζί;
B) Με πόσους τρόπους μπορώ να διαλέξω 5 χαρτιά από μία τράπουλα αν θέλω 3 να είναι κόκκινα και 2 να είναι σπαθιά; Αν θέλω 3 κόκκινα απο τα οποία τα 2 να είναι κούπες;

14. Αν $A_n = [\frac{-1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$ και $B_n = [2 + \frac{1}{n}, 8 - \frac{1}{n})$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = 2x + 1$ βρείτε $f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n)$ και $f(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n)$.

15. Δώστε παράδειγμα
α)συνάρτησης $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ που να είναι 1-1 αλλά όχι επί
β) συνάρτησης $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ που να είναι επί αλλά όχι 1-1

16. Βρείτε όλους τους μιγαδικούς αριθμούς $z \in \mathbb{C}$, για τους οποίους ισχύει

$$|z| = 1 \quad \text{και} \quad \frac{|z^2 + i|}{|z + 1|} = 1.$$

17. Υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\tfrac{k\pi}{5}\right).$$

18. Εξηγήστε γεωμετρικά τις παρακάτω σχέσεις:

$$1)\ |z_1| = |z_2| = |z_3|,\ 2)\ \ z_1 + z_2 + z_3 = 0,\ 3)\ \ |z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$$

Δείξτε ότι αν ισχύουν οποιεσδήποτε 2 από τις παραπάνω 3 σχέσεις τότε συνεπάγεται και η τρίτη.

19. Δείξτε ότι αν z_0, z_1, z_2 είναι κυβικές ρίζες του 1 τότε $(4z_0 + 7z_1 + 4z_2)^3 = 27$.

20. Να λυθούν στο $\mathbb{C}$ οι εξισώσεις $z^5 + z^{-5} = 0$ και $z^3 = 8(1 - z)^3$.