

Θεμέλια των Μαθηματικών
Χειμερινό 2016,
Θ. Γαρεφαλάκης, Μ. Λουκάκη
Φυλλάδιο 2

1 Αποδείξτε ότι $A \cap B = \emptyset$ αν και μόνο αν $A^c \cap B = B$.

2 Κάνοντας χρήση της ιδιότητας $A \setminus B = A \cap B^c$, αποδείξτε ότι

$$(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C).$$

3 Υπολογίστε τα σύνολα $A \Delta A, A \Delta \emptyset$. Δείξτε τις επόμενες ιδιότητες της συμμετρικής διαφοράς συνόλων.

1) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

2) $A \Delta B = B \Delta A$

3) $(A \Delta B) \Delta A = B$

4) Με χρήση του 3) δείξτε ότι αν $A \Delta B = A \Delta C$ τότε $B = C$.

4 Υπολογίστε το δυναμοσύνολο των συνόλων $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ και $B = \{1, \{1\}, \{1, \{1\}\}\}$

5 Αν A, B σύνολα δείξτε τα ακόλουθα για τα δυναμοσύνολά τους

1) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$

2) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

3) $\bigcap_{X \in \mathcal{P}(A)} X = \emptyset$

4) $A = \bigcup_{X \in \mathcal{P}(A)} X$

6 Βρείτε 1) άπειρη ακολουθία κλειστών διαστημάτων που η τομή τους να είναι το $[2, 3]$

2) την τομή $\bigcap_{\epsilon \in \mathbb{R}^+} (0, \epsilon)$.

7 Αν $A_k = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq k \text{ και } n \leq 2k\}$ για κάθε $k = 1, 2, 3, \dots$, βρείτε $\bigcap_k A_k$ και $\bigcup_k A_k$.

8 Για κάθε $n = 1, 2, \dots$ ορίζουμε $A_n = [0, 1 - 2^{-n}]$ και $B_n = [0, 1 - 3^{-n}]$. Δείξτε ότι κάθε A_n είναι γνήσιο υποσύνολο του B_n αλλά $\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n$.