Θεμέλια των Μαθηματικών
Εαρινό 2016, Θ. Γαρεφαλάκης, Μ. Λουκάκη
Φυλλάδιο 3

1. Βρείτε το πραγματικό και φανταστικό μέρος των παρακάτω μιγαδικών αριθμών.
   (α′) $\frac{1+2i}{(2+i)^2}$,
   (β′) $\frac{1+i}{1-i} + \frac{2}{1+2i}$.

2. Περιγράψτε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους:
   (α′) $(z-1)(\bar{z}+2i) \in \mathbb{R}$,
   (β′) $|z| = iz$.

3. Δίνονται τα εξής υποσύνολα των μιγαδικών αριθμών:
   $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-2| = 1/2\}$
   $C = \{z \in \mathbb{C} \mid Argz = 3\pi/2\}$ και $D = \{z \in \mathbb{C} \mid Imz \leq 0$ και $Rez \geq 0\}$.
   Αφού ζωγραφίσετε στο μιγαδικό επίπεδο τα παραπάνω σύνολα αποφασίστε τί από τα παρακάτω ισχύει:
   1) $A \cap B \subseteq C$
   2) $z \in A \Rightarrow z \in C \cup D$
   3) $z \notin B \Rightarrow z \in A$
   4) $z \in A \cap C \Rightarrow z \in D$
   5) $z \notin A \cup B \Rightarrow z \notin D$
   6) $z \notin D \Rightarrow z \notin C$

4. Αποδείξτε ότι για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύει
$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

5. Βρείτε το πραγματικό και φανταστικό μέρος των παρακάτω μιγαδικών αριθμών.
   (α′) $(1 + i\sqrt{3})^{123}$,
   (β′) $z_1^{1821} + z_2^{1821}$, όπου z_1, z_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $z^2 - z + 1 = 0$.

6. Βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες του i.

7. Αν $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x + \ldots + a_nx^n$ είναι πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές (δηλ. $a_i \in \mathbb{R}$) και $z \in \mathbb{C}$ μία μιγαδική ρίζα του (δηλ. $p(z) = 0$) δείξτε ότι και η $\bar{z}$ είναι επίσης ρίζα του.

8. Βρείτε όλες τις ρίζες της εξίσωσης $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

9. Έστω $n \geq 2$ φυσικός αριθμός και $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_{n-1}$, οι n-οστές ρίζες τις μονάδας. Αποδείξτε ότι $\sum_{k=0}^{n-1} \zeta_k = 0$.

   Όποιος ενδιαφέρεται για κάτι παραπάνω μπορεί να δει και την

10. Έστω $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z+2| = \sqrt{2}\}$. Βρείτε τις τιμές που παίρνει το πρωτεύον όρισμα $Argz$ όταν $z \in A$.