Θεμέλια των Μαθηματικών
Χειμερινό 2016, Θ. Γαρεφαλάκης, Μ. Λουκάκη
Φυλλάδιο 4

Από τις επόμενες ασκήσεις θα κάνουμε στο εργαστήριο της Τρίτης από την πρώτη άσκηση μία από τις δύο πρώτες ισότητες και την τελευταία σχέση, από την δεύτερη $\mathcal{Z}_4$ και $\mathcal{Z}_5$ και απο την 3 τις α, γ, ε, ζ, ϑ, ι και τουλάχιστον μία από η ή κ, και, φυσικά, όσες επιπλέον προλάβουμε. Οι υπόλοιπες είναι για δική σας εξάσκηση. Αν υπάρχουν απορίες ευχαρίστως να τις δούμε μαζί.

1. Αν $S, T$ συλλογές συνόλων αποδείξτε ότι

$$(\bigcup_{A\in S} A) \times (\bigcup_{B\in T} B) = \bigcup_{A\in S, B\in T} (A \times B),$$

$$(\bigcap_{A\in S} A) \times (\bigcap_{B\in T} B) = \bigcap_{A\in S, B\in T} (A \times B),$$

και

$$(A \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$$

Δώστε παράδειγμα που να αποδεικνύει ότι δεν ισχύει πάντα η ισότητα στην τελευταία σχέση.

2. Φτιάξτε τους πίνακες πολ/μου και πρόσθεσης των $\mathcal{Z}_4, \mathcal{Z}_5, \mathcal{Z}_6$. Παρατηρήστε ότι στα $\mathcal{Z}_4$ και $\mathcal{Z}_6$ υπάρχουν μη μηδενικά στοιχεία που το γινόμενό του κάνει μηδέν. Αυτό δεν συμβαίνει στο $\mathcal{Z}_5$.(Γενικά, ισχύει το εξής: Αν $m$ είναι πρώτος αριθμός τότε το γινόμενο $[k]_m \cdot [l]_m = [0]_m$ αν και μόνο αν είτε $[k]_m = [0]_m$ ή $[l]_m = [0]_m$. Αν $m$ είναι σύνθετος τότε υπάρχουν $[k]_m \neq [0]_m$ και $[l]_m \neq [0]_m$ ώστε $[k]_m \cdot [l]_m = [0]_m$.)

3. Στα επόμενα προβλήματα δίνονται σχέσεις σε σύνολα. Εξετάστε αν είναι σχέσεις ισοδυναμίας ή όχι και σε όσες είναι προσδιορίστε τις κλάσεις ισοδυναμίας με όσο πιο απλό τρόπο μπορείτε. (Θυμόμαστε ότι οι κλάσεις ισοδυναμίας θα μας δώσουν μία διαμέριση του συνόλου.)
α) Στο $\mathbb{R}$, $x \sim y$ αν και μόνο αν $|x| = |y|$
β) Στο $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \sim y$ αν και μόνο αν "Υπάρχει $r \in Q$ ώστε $x = ry$"
γ) Στο σύνολο $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $x \sim y$ αν και μόνο αν $y/2 \leq x \leq 2y$
δ) Στο $\mathbb{N}$, $x \sim y$ αν και μόνο αν "Υπάρχει $n \in \mathbb{Z}$ ώστε $x = 2^n y$ "
ε) Στο $\mathbb{R}$, $x \sim y$ αν και μόνο αν $xy > 0$
ζ) Στο $\mathbb{R}^*$, $x \sim y$ αν και μόνο αν $xy > 0$
η) Στο $\mathbb{C}$, $z_1 \sim z_2$ αν και μόνο αν $|z_1| = |z_2|$ (εδώ υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση ανάμεσα στην διαμέριση που προκύπτει και στο $[0, +\infty)$, βλέπετε ποια είναι ;)
ϑ) Στο $\mathcal{Z}$, $x \sim y$ αν και μόνο αν $x^2 \equiv y^2 (mod 4)$
ι) Στο $\mathbb{C}$, $z_1 \sim z_2$ αν και μόνο αν $Re(z_1) = Re(z_2)$
κ) Στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $(x,y) \sim (a,b)$ αν και μόνο αν " Υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε , $(x,y) = \lambda(a,b)$". (εδώ υπάρχει αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση ανάμεσα στην διαμέριση που προκύπτει και στο $[0, 2\pi)$, βλέπετε ποια είναι ;)

4. Μπορείτε να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό στοιχείων που πρέπει να έχει μία (μη κενή) σχέση $R$ στο $A = \{1, 2, 3\}$ ώστε να είναι ανακλαστική ; συμμετρική ; μεταβατική;

5. Υπάρχει κάποιο λάθος στην παρακάτω απόδειξη οτι εάν μία σχέση $\sim$ είναι συμμετρική και μεταβατική, τότε είναι ανακλαστική· Εξηγήστε την απάντησή σας. 'Απόδειξη': Εστω $\alpha \sim \beta$. Αφού η $\sim$ είναι συμμετρική, $\beta \sim \alpha$. Αφού η $\sim$ είναι μεταβατική, από τα $\alpha \sim \beta$ και $\beta \sim \alpha$ συμπεραίνουμε $\alpha \sim \alpha$. Αρα η $\sim$ είναι ανακλαστική.