Θεμέλια των Μαθηματικών
Χειμερινό 2016, Θ. Γαρεφαλάκης, Μ. Λουκάκη
Φυλλάδιο 5

1. Δείξτε ότι η σχέση ρ που ορίζεται στους ακεραίους σαν $a\rho b$ αν και μόνο αν $a \mid b$ είναι σχέση μερικής διάταξης. Σύμφωνα με αυτή την σχέση εξετάστε αν τα παρακάτω σύνολα ακεραίων έχουν μέγιστα ή μεγιστικά στοιχεία καθώς και ελάχιστα ή ελαχιστικά.
1) $A = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$
2) $B = \{2, 3, 6, 12\}$.

2. Δείξτε ότι αν το σύνολο A είναι εφοδιασμένο με μία σχέση ολικής διάταξης τότε έχει το πολύ ένα μεγιστικό στοιχείο το οποίο θα είναι και μέγιστο. (Φυσικά, όπως ξέρουμε (;), κάθε μέγιστο είναι και μεγιστικό σε σχέσεις μερικής ή ολικής διάταξης). Το αντίστοιχο ισχύει και για ελάχιστα-ελαχιστικά στοιχεία δηλ. σε μία σχέση ολικής διάταξης υπάρχει το πολύ ένα ελαχιστικό στοιχείο το οποίο θα είναι και ελάχιστο.

3. Αν f, g, h οι συναρτήσεις στους φυσικούς αριθμούς (μαζί και το 0):
$$f(n) = n + 1,\ g(n) = 2n,\ h(n) = \begin{cases} 0 \text{ αν } n \text{ αρτιος ή } 0 \\ 1 \text{ αν } n \text{ περιττός} \end{cases} .$$
Βρείτε
1) Τις αντίστροφες εικόνες $f^{-1}(1, 2, 3), g^{-1}(1, 2, 3)$ και $h^{-1}(1, 2, 3)$.
2) Τις συνθέσεις $f \circ f, f \circ g, g \circ h, h \circ g$ και $(f \circ g) \circ h$.

4. Έστω $f : A \to B$. Αν $X_1 \subseteq X_2 \subseteq A$, δείξτε ότι $f(X_1) \subseteq f(X_2)$. Αν $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq B$ τότε $f^{-1}(Y_1) \subseteq f^{-1}(Y_2)$.

5. Αν $f : A \to B$ και $g : B \to C$ δείξτε ότι αν f, g είναι 1-1 (αντίστοιχα επί) τότε και η $g \circ f$ είναι 1-1 (και αντίστοιχα επί).

6. Αν $f : X \to Y$ και $(A_t)_{t\in T}$ οικογένεια υποσυνόλων του X, δείξτε ότι:
1) $f(\bigcup_{t\in T} A_t) = \bigcup_{t\in T} f(A_t)$ (έγινε στην τάξη)

2) $f(\bigcap_{t\in T} A_t) \subseteq \bigcap_{t\in T} f(A_t)$

3) Αν f είναι 1-1 τότε $f(\bigcap_{t\in T} A_t) = \bigcap_{t\in T} f(A_t)$

ΕΞΤΡΑ Ασκήσεις για δική σας εξάσκηση

1. Για τις παρακάτω συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ βρείτε την εικόνα της f και εξετάστε αν είναι 1-1, επί, αμφιμονοσήμαντες.
1) $f(x) = x^2 + 2x + 2$
2) $f(x) = |x|$
3) $f(x) = x^2 + x - |x|^2$
4) $f(x) = e^x + 4$
5) $f(x) = \begin{cases} 1/x \text{ αν } x \neq 0 \\ 0 \text{ αν } x = 0 \end{cases}$

2. Δώστε παραδείγματα συναρτήσεων $f : \mathcal{Z} \to \mathcal{Z}$ που να είναι:
   1) 1-1 αλλά όχι επί
   2) επί αλλά όχι 1-1
   3) ούτε 1-1 ούτε επί
   4) και επί και 1-1 (δηλ. αμφιμονοσήμαντη)

3. Έστω $f : A \to B$ και $g : B \to C$ δείξτε ότι
   1) Αν $g \circ f$ είναι 1-1 τότε και η f είναι 1-1. Δείξτε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή υπάρχουν f, g με f 1-1 χωρίς να είναι 1-1 η σύνθεση $g \circ f$.
   2) Αν $g \circ f$ είναι επί τότε και η g είναι επί. Δείξτε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει, δηλαδή υπάρχουν f, g με g επί χωρίς να είναι επί η σύνθεση $g \circ f$.