

Θεμέλια των Μαθηματικών
Χειμερινό 2016, Θ. Γαρεφάλακης, Μ. Λουκάκη
Φυλλάδιο 6

1. Γράψτε τις παρακάτω προτάσεις με λογικά σύμβολα και εξετάστε αν είναι σωστές:
 - 1) Για κάθε πραγματικό αριθμό x υπάρχει πραγματικός αριθμός y ώστε $x = y^3$.
 - 2) Υπάρχει πραγματικός αριθμός y τέτοιος ώστε για κάθε πραγματικό αριθμό x , το άθροισμα $x + y$ είναι θετικό.
 - 3) Για κάθε άρρητο αριθμό x υπάρχει φυσικός n ώστε $x < n < x + 1$.
 - 4) Το τετράγωνο κάθε ακέραιου αφήνει υπόλοιπο 0 ή 1 όταν διαιρεθεί με το 4.
 - 5) Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πρώτων αριθμών διαφορετικών από το 2 είναι άρτιος αριθμός. (Το σύνολο των πρώτων αριθμών συμβολίζεται με \mathbb{P} .)
 - 6) Κάθε μη μηδενικός πραγματικός αριθμός έχει αντίστροφο.
 - 7) Ένας 2 επί 2 πραγματικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν η ορίζουσα του δεν είναι 0 (το σύνολο των 2 επί 2 πραγματικών πινάκων συμβολίζεται με $M_2(\mathbb{R})$).
2. Δώστε τις αντίστροφες και τις αντιθετοαντίστροφες των παρακάτω προτάσεων. Ποιές είναι σωστές;
 - 1) $\forall n \in \mathbb{N}$, αν n^2 είναι άρτιος τότε n είναι άρτιος.
 - 2) $\forall n \in \mathbb{N}$ αν n είναι πρώτος τότε n είναι περιττός ή $n = 2$.
3. Γράψτε την άρνηση για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις. Ποιά είναι σωστή η πρόταση ή η άρνησή της;
 - 1) Για κάθε p πρώτο αριθμό, είτε p είναι περιττός είτε $p = 2$.
 - 2) Για κάθε ζώο x , αν x είναι τίγρης τότε το x έχει ρίγες και νύχια.
 - 3) Για κάθε πραγματικούς αριθμούς x και y , αν $x^2 = y^2$ τότε $x = y$.
 - 4) Το γινόμενο ενός άρρητου με ένα ρητό είναι άρρητος.Τώρα γράψτε τις αρνήσεις των παρακάτω:
 - α) $\forall x : (P(x) \vee Q(x))$
 - β) $\forall x : (P(x) \wedge Q(x))$
 - γ) $\exists x : (P(x) \Rightarrow Q(x))$
 - δ) $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : (x \geq y)$
 - ε) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{Q} : (x + y \geq q)$
4. Δείξτε τις ισοδυναμίες:
 - 1) $((P \wedge Q) \vee (\neg P)) \equiv ((\neg P) \vee Q)$.
 - 2) $(\neg(P \Rightarrow Q)) \equiv (P \wedge (\neg Q))$.
 - 3) $((P \wedge Q) \vee ((\neg P) \wedge (\neg Q))) \equiv ((P \vee (\neg Q)) \wedge (Q \vee (\neg P)))$.