Θεμέλια των Μαθηματικών
Χειμερινό 2016, Θ. Γαρεφαλάκης, Μ. Λουκάκη
Φυλλάδιο 8

1. Δείξτε με επαγωγή
   1) $x - y \mid (x^n - y^n)$ όπου x, y είναι ακέραιοι και $n \geq 1$.
   2) $\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$ για $n \geq 1$
   3) $3 \mid (n^3 - 10n + 9)$ για $n \geq 1$ (Εδώ υπάρχει και άλλη απόδειξη χωρίς επαγωγή, μπορείτε να την δείτε;)
   4) $\sqrt{n} < \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}}$ για $n \geq 2$.
   5)Αν η ακολουθία a_n ορίζεται αναδρομικά σαν $a_1 = 1, a_2 = 1$ και $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ για $n \geq 3$, δείξτε ότι $a_n = \frac{a^n - b^n}{a-b}$ όπου $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

2. Δείξτε ότι αν $m, n, s \in \mathbb{N}$ και $m|s$, $n|s$ και μκδ$(m, n) = 1$,τότε $mn|s$. Δείξτε ότι δεν ισχύει το ίδιο συμπέρασμα αν δεν υποθέσουμε ότι μκδ$(m, n) = 1$. Δηλ. υπάρχουν φυσικοί m, n, s με $m|s$, $n|s$ αλλά $mn \nmid s$.

3. 1) Βρείτε όλους τους κοινούς διαιρέτες των 252 και 180 α) με χρήση του Ευκλείδιου αλγόριθμου ή β) παραγοντοποιώντας τους δύο αριθμούς σε πρώτους παράγοντες.
   2) Βρείτε m, n ώστε $180m + 252n =$ μκδ$(252, 180)$ (Αντιστρέψτε τον Ευκλείδιο αλγόριθμο).

4. Αποδείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει μκδ$(3n + 1, 10n + 3) = 1$.