

Θεμέλια των Μαθηματικών  
Χειμερινό 2016, Θ. Γαρεφαλάκης, Μ. Λουκάκη  
Φυλλάδιο 9

Σε όλες τις ασκήσεις που ακολουθούν τα  $m, n, k$  είναι φυσικοί αριθμοί και με  $(m, n)$  συμβολίζουμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των  $m, n$

1. Αν  $p$  είναι πρώτος αριθμός και  $p \mid m$  και  $p \mid m^2 + n^2$  δείξτε ότι  $p \mid n$ .
2. Αποδείξτε ότι  $(m + n, mn) = 1$  αν  $(m, n) = 1$ .
3. Δείξτε ότι  $(rm, rn) = r(m, n)$ .
4. Αποδείξτε ότι  $\mu\kappa\delta(m, n) = d$  αν και μόνο αν  $\mu\kappa\delta(m/d, n/d) = 1$ .
5. Αν  $(a, b) = 1$  και το γινόμενο  $ab$  είναι τετράγωνο ακεραίου τότε και οι  $a, b$  είναι τετράγωνα ακεραίων.
6. Δείξτε ότι  $m^n \mid k^n$  αν και μόνο αν  $m \mid k$ .
7. Αν  $(a, b) = 1$  ποιες είναι οι δυνατές τιμές για τον μέγιστο κοινό διαιρέτη
  - 1)  $(a + b, a - b)$
  - 2)  $(a^2 + b^2, a + b)$ .
8. Να βρεθούν όλοι οι πρώτοι  $p$  ώστε  $p + 5$  είναι επίσης πρώτος.
9. Από 12 κορίτσια και 10 αγόρια πόσες ομάδες μπάσκετ αγοριών και κοριτσιών μπορώ να φτιάξω; (Υποθέτουμε ότι κάθε παίχτης έχει συγκεκριμένο ρόλο στην ομάδα.)