

Η διάρκεια της εξέτασης είναι $2\frac{1}{4}$ ώρες. Υπάρχουν 11.5 μονάδες στα παρακάτω θέματα. Άριστα είναι το 10. Ελάχιστος χρόνος παραμονής είναι 1 ώρα. Παραδίδετε τα γραπτά σας (μαζί και το πρόχειρο) και τα θέματα κατά την αποχώρησή σας από την αίθουσα. Επίσης σας υπενθυμίζουμε ότι:

Με απόφαση της Γενικής Συνέλευσης του Τμήματος, σε περίπτωση αντιγραφής ή πρόθεσης αντιγραφής επιβάλλεται κύρωση σε όλους τους εμπλεκόμενους φοιτητές, κατ' ελάχιστον, ο αποκλεισμός από την εξεταστική περίοδο σε όλα τα μαθήματα του επόμενου ακαδημαϊκού εξαμήνου. Μετά την έναρξη της εξέτασης, η ύπαρξη κινητού (έστω και απενεργοποιημένου) πάνω ή δίπλα σε κάποιον φοιτητή, θα θεωρηθεί ως πρόθεση αντιγραφής.

Θέμα 1 (1.5 μον.)

Δίνονται τα σύνολα $A = \{n \in \mathbb{Z} \mid |n| \leq 2\}$, $B = \{q \in \mathbb{Q} \mid q \leq 7\}$ και $C = \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 3m \text{ για κάποιο } m \in \mathbb{Z}\}$.

- 1) Προσδιορίστε τα σύνολα $A \cap B$, $A \cap C$, $C \setminus B$ και $A \Delta C$.
- 2) Είναι το σύνολο $\{0, 1\}$ στοιχείο του $\mathcal{P}(A)$;

Θέμα 2 (2 μον.)

- α) Προσδιορίστε στο μιγαδικό επίπεδο το σύνολο $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Arg}(z^2) = \pi\}$.
- β) Λύστε στο \mathbb{C} την εξίσωση $z^3 + (z - 1)^3 = 0$.

Θέμα 3 (2 μον.)

- α) Δείξτε (με επαγωγή) ότι $2^n > n^2$ για κάθε $n \geq 5$.
- β) Αποδείξτε ότι $\text{μκδ}(m + n, mn) = 1$ αν $\text{μκδ}(2m, n) = 1$.

Θέμα 4 (2 μον.)

- α) Να γραφεί η άρνηση της πρότασης:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0, \quad -\epsilon \leq a_n \leq \epsilon.$$

- β) Ποιά είναι η αντιθετοαντίστροφη της πρότασης: Αν αύριο ο καιρός είναι καλός θα πάω για μπάνιο στον Άγιο Παύλο.
- γ) Εξετάστε αν είναι ταυτολογία η $(P \Rightarrow Q) \vee (\neg P)$.

Θέμα 5 (2 μον.)

Έστω $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ οι συναρτήσεις με τύπους

$$f(n) = n + 4, \quad g(n) = \begin{cases} 1 & \text{αν } n \text{ αρτιος} \\ 2 & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}.$$

- α) Εξετάστε αν είναι 1-1 και επί.
- β) Βρείτε $f \circ g$ και $g \circ f$.
- γ) Βρείτε $g^{-1}(0)$ και $f^{-1}(A)$ όπου $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} (1 - 1/n, 3)$.

Θέμα 6 (2 μον.)

- α) Ρίχνω 3 ζάρια και καταγράφω τα αποτελέσματα σε τριάδες. Πόσα δυνατές τριάδες υπάρχουν;
- β) Σε πόσες έχω τουλάχιστον 2 εξάρια;
- γ) Σε πόσες το πρώτο ψηφίο είναι γνήσια μικρότερο από τα άλλα δύο;