

Θέμα 1: (1.5 μον.) Έστω  $A, B$  σύνολα. Συμβολίζουμε με  $\mathcal{P}(A)$  το δυναμοσύνολο του  $A$ . Δείξτε ότι  $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$  αν και μόνο αν  $A = B$ .

Θέμα 2: (2 μον.) Στο  $\mathbb{R}$  ορίζουμε την εξής σχέση

$$x \sim y \text{ αν και μόνο αν } x = 3^n y, \text{ για κάποιο } n \in \mathbb{Z}$$

όπου  $x, y \in \mathbb{R}$ .

1) Δείξτε, αναλυτικά, ότι είναι σχέση ισοδυναμίας στο  $\mathbb{R}$ .

2) Περιγράψτε την κλάση ισοδυναμίας  $[3]$ .

3) Δώστε άλλες δύο κλάσεις ισοδυναμίας, διαφορετικές από το  $[3]$ , και από δύο στοιχεία σε κάθε κλάση.

Θέμα 3: (2 μον.) Δείξτε ότι για κάθε  $n \in \mathbb{N}$

$$(1 + i)^n + (1 - i)^n = 2^{\frac{n+2}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}.$$