

Μεταπτυχιακή Άλγεβρα 1,
Εαρινό 2017,
Φυλλάδιο 1

1. Δείξτε ότι κάθε ομάδα άρτιας τάξης έχει στοιχείο τάξης 2.
2. Αν η G έχει ακριβώς δύο υποομάδες τότε είναι κυκλική τάξης p , με p πρώτο.
3. Δείξτε ότι τα παρακάτω ζευγάρια ομάδων δεν είναι ισόμορφες:
 - 1) Οι πολ/κες \mathbb{R}^* και \mathbb{C}^* .
 - 2) Οι προσθετικές \mathbb{R} και \mathbb{Q} .
 - 3) Οι προσθετικές \mathbb{Z} και \mathbb{Q} .
 - 4) Οι προσθετικές $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ και \mathbb{Z}_{2n} .
4.
 - 1) Για ποια n η S_7 περιέχει στοιχεία τάξης n ;
 - 2) Δείξτε ότι το γινόμενο 2 ξένων αντιμεταθέσεων στην S_4 μαζί με το 1 αποτελούν αβελιανή υποομάδα της S_4 (την γνωστή ομάδα του Klein) που συμβολίζουμε V . Πόσες υποομάδες έχει η V ;
5. Αν F σώμα, ορίζουμε την ομάδα Heisenberg $H(F)$ ως $H(F) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in F \right\}$ με πράξη πολλαπλασιασμό πινάκων.
 - 1) Δείξτε ότι η ομάδα δεν είναι αβελιανή.
 - 2) Αν $F = \mathbb{Z}_2$ η $H(F)$ είναι πεπερασμένη. Βρείτε την τάξη κάθε στοιχείου της.
 - 3) Αν $F = \mathbb{R}$ δείξτε ότι κάθε στοιχείο, διάφορο του 1, έχει άπειρη τάξη.
6. Αν G αβελιανή ομάδα, δείξτε ότι η $H = \{g \in G \mid o(g) < \infty\}$ είναι υποομάδα (ονομάζεται torsion subgroup της G .) Δώστε παράδειγμα όπου η H δεν είναι υποομάδα αν η G δεν είναι αβελιανή. (Υποδ. Ψαζτε μέσα στην $GL_2(\mathbb{Q})$.)
7. Στην ομάδα $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}$ βρείτε την torsion υποομάδα της. Δείξτε ότι το σύνολο των στοιχείων άπειρης τάξης της G μαζί με το 1_G δεν αποτελούν υποομάδα.
8. Υπολογίστε τα κέντρα $Z(D_n)$, $Z(S_n)$ και $Z(GL_n(\mathbb{R}))$.
9. Αν H, K και N είναι υποομάδες της G τ.ω. $H < N$ τότε $HK \cap N = H(K \cap N)$.