Μεταπτυχιακή Άλγεβρα 1, 2017
Φυλλάδιο 10

1. Έστω R μεταθετικός δακτύλιος με 1. Δείξτε ότι :
1) Κάθε κυκλικό R-module είναι ισόμορφο με ένα R-module της μορφής R/J όπου J είναι ιδεώδες του R.
2) Αν M είναι απλό R-module (δηλ. τα μόνα R-submodule είναι το O και το M) τότε M είναι κυκλικό και ισόμορφο με R/J όπου J είναι μέγιστο ιδεώδες του R.
3) (Schur's Lemma) Έστω $\phi : M \to M'$ μη μηδενικός ομομορφισμός απλών R-module. Τότε ϕ είναι ισομορφισμός.
4) Ο δακτύλιος των ενδομορφισμών $End_R(M) = Hom_R(M, M)$ ενός απλού R-module είναι σώμα.

2. Έστω M η αβελιανή ομάδα (δηλ. $\mathbb{Z}$-module) $M = \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/50\mathbb{Z}$. Βρείτε:
1) Τον μηδενιστή $Ann(M)$ στο $\mathbb{Z}$.
2) Για το ιδεώδες $I = 2\mathbb{Z}$ του $\mathbb{Z}$ υπολογίστε το $\{m \in M \mid am = 0 \ \forall\ a \in I\}$ σαν γινόμενο κυκλικών ομάδων.

3. Έστω R μεταθετικός δακτύλιος με 1.Δείξτε ότι
1) $Hom_R(R, M) \cong M$ σαν R-modules.
2) $Hom_R(R, R) \cong R$ σαν δακτύλιοι.
3) Αν F είναι ελεύθερο R-module με rank n , τότε $Hom_R(F, M) \cong M \times \cdots \times M$ n-φορές.
4) Τι είναι ο δακτύλιος $Hom_R(R/I, R/I)$, όπου I είναι ιδεώδες του R ;

4.Έστω R μεταθετικός δακτύλιος με 1. Σωστό η λάθος;
1) Αν I ιδεώδες του R και R/I είναι ελεύθερο R-module τότε $I = 0$.
2) Αν F ελεύθερο R-module με πεπερασμένο rank, τότε κάθε σύνολο γεννητόρων του περιέχει βάση.
3) Αν F ελεύθερο R-module με πεπερασμένο rank, τότε κάθε γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο στοιχείων του επεκτείνεται σε βάση.

5.Έστω R μεταθετικός δακτύλιος με 1. Αν I ιδεώδες του R τότε I είναι ελεύθερο R-module ανν είναι κύριο ιδεώδες που παράγεται από ένα στοιχείο a που δεν είναι μηδενοδιαιρέτης στο R.

6.Έστω R μεταθετικός δακτύλιος με 1. Αν $R \neq 0$ τ.ω. κάθε π.π. R-module είναι ελεύθερο τότε ο R είναι σώμα.