

Στα παρακάτω  $R$  είναι μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα και  $M$  είναι  $R$ -module.

1. Δώστε παράδειγμα μιας άπειρης αβελιανής ομάδας που είναι ελεύθερο  $\mathbb{Z}$ -module και μιας άπειρης αβελιανής ομάδας που δεν είναι ελεύθερο  $\mathbb{Z}$ -module
2. Δείξτε ότι ένα  $R$ -module  $M$  είναι ελεύθερο αν και μόνο αν το  $M$  έχει υποσύνολο  $S$  τέτοιο ώστε κάθε συνάρτηση  $f$  από το  $S$  σε κάποιο  $R$ -module  $N$  επεκτείνεται σε ένα module ομομορφισμό από το  $M$  στο  $N$ .
3. Δείξτε ότι αν κάθε  $R$ -submodule ενός ελεύθερου  $R$ -module είναι ελεύθερο τότε ο  $R$  είναι P.I.D.
4. 1) Βρείτε  $R$ -modules  $A, B, C$  τέτοια ώστε  $A \oplus B \cong A \oplus C$  αλλά  $B \not\cong C$ . (Υποδ. πάρτε  $R = \mathbb{Z}$ .)  
2) Βρείτε  $R$ -module  $M$  και δυο submodule του,  $N_1$  και  $N_2$  ώστε  $N_1 \cong N_2$  να είναι ισόμορφα σαν  $R$ -module αλλά τα πηλίκα  $M/N_1$  και  $M/N_2$  να μην είναι ισόμορφα.
5. Αν  $V$  διανυσματικός χώρος δείξτε ότι  $V$  είναι πεπερασμένης διάστασης αν και μόνο αν  $V$  είναι Noetherian αν και μόνο αν  $V$  είναι Artinian αν και μόνο αν ο  $V$  έχει composition series.
6. 1) Αν  $O \rightarrow A \rightarrow B \xrightarrow{f} C \rightarrow 0$  και  $O \rightarrow C \xrightarrow{g} D \rightarrow E \rightarrow 0$  είναι ακριβείς ακολουθίες από  $R$ -modules τότε και η  $O \rightarrow A \rightarrow B \xrightarrow{gf} D \rightarrow E \rightarrow 0$  είναι ακριβής.  
2) Δείξτε ότι κάθε ακριβής ακολουθία μπορεί να προκύψει από short ακριβείς ακολουθίες όπως στο 1.
7. Έστω  $0 \rightarrow K \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$  ακριβής ακολουθία από  $R$ -module. Δείξτε ότι  $M$  Noetherian αν και μόνο αν  $K$  και  $N$  είναι Noetherian.

8. Θεωρούμε το παρακάτω μεταθετικό διάγραμμα με ακριβείς γραμμές:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & & & & \downarrow v & & \downarrow w \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

Δείξτε ότι υπάρχει ομομορφισμός  $T : A \rightarrow A'$  που κάνει το τετράγωνο  $ABB'A'$  μεταθετικό (και άρα ολόκληρο το διάγραμμα).