Μεταπτυχιακή Άλγεβρα 1, Εαρινό 2017
Φυλλάδιο 12

1. 1) Έστω T η γραμμική απεικόνιση από το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}^2$ που δίνεται από στροφή (clockwise) κατά $\pi/2$. Ο T (έχουμε δει) κάνει τον $\mathbb{R}^2$ ενα $\mathbb{R}[x]$-module. Δείξτε ότι τα μόνα $\mathbb{R}[x]$-submodule του $\mathbb{R}^2$ είναι ο $\mathbb{R}^2$ και το 0.
2) Έστω T' η γραμμική απεικόνιση από το $\mathbb{R}^2$ στο $\mathbb{R}^2$ που δίνεται από την προβολή στον y-άξονα. Δείξτε ότι τα μόνα $\mathbb{R}[x]$-submodule (ως προς την δράση που ορίζει ο T') του $\mathbb{R}^2$ είναι ο $\mathbb{R}^2$, το 0, ο x-άξονας και ο y-άξονας.

2. 1) Αν $D \in Mat_6\mathbb{R}$ ο διαγώνιος πίνακας που έχει στην διαγώνιό τουν τα στοιχεία a, a, a, b, b, c βρείτε ποιά πολυώνυμα είναι τα invariant factors του D.
2) Περιγράψτε τα invariant factors ενός διαγώνιου πίνακα του $Mat_n R$.

3. Βρείτε όλες τις δυνατές (primary) rational canonical forms τοψ πίνακα $A \in Mat_6(\mathbb{Q})$ αν A έχει ελάχιστο πολυώνυμο το $(x-2)^2(x^2+1)$. Αν θεωρήσουμε τον A πάνω από το $\mathbb{C}$ βρείτε όλες τις δυνατές Jordan μορφές του.

4. Βρείτε την (primary) rational canonical form του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Βρείτε επίσης την Jordan μορφή του.

5. Βρείτε όλες τις δυνατές Jordan μορφές ενός $2 \times 2, 3 \times 3$ και 4×4 πίνακα πάνω από το C.

6. Θεωρούμε το δακτύλιο πολυωνύμων $R = \mathbb{R}[t]$ και το R-module $M = \mathbb{R}^3$, όπου το $\alpha \cdot x$ ($\alpha \in R, x \in M$) ορίζεται ως συνήθως αν $\alpha \in \mathbb{R}$ ενώ $\alpha \cdot x = (x_1, 0, 0)$ αν $\alpha = t, x = (x_1, x_2, x_3)$. Είναι συνέπεια του θεωρήματος κατάταξης πεπερασμένα παραγομένων R-module ότι υπάρχει μια λίστα $p_1, p_2, \ldots, p_n$ αναγώγων του R και μια λίστα $k_1, k_2, \ldots k_n$ θετικών ακεραίων τέτοιες ώστε $M \cong R/<p_1^{k_1}> \oplus \cdots \oplus R/<p_n^{k_n}>$. Να βρείτε αυτές τις λίστες.
Πως αλλάζουν οι παραπάνω λίστες αν η δράση του t δίνεται σαν $t \cdot (x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2, 0)$;