

1. Δείξτε ότι το στοιχείο $2 \otimes 1$ είναι 0 στο $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$ αλλά δεν είναι 0 στο $2\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$.
2. 1) Δείξτε ότι τα $\mathbb{R}$ -modules $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ και $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}$ δεν είναι ισόμορφα.
2) Δείξτε ότι τα $\mathbb{Q}$ -modules $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ και $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}$ είναι ισόμορφα.
3. Αν A είναι αβελιανή ομάδα δείξτε ότι
1) Για κάθε $m > 0$, $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_m \cong A/mA$.
2) $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_d$ όπου d είναι ο μ.κ.δ. $d = (m, n)$ των m, n .
4. 1) Δείξτε ότι αν e_1, e_2 είναι βάση του $\mathbb{R}^2$ τότε το στοιχείο $e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$ του $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ δεν είναι απλός 'τένσορας' $u \otimes v$ με $u, v \in \mathbb{R}^2$.
2) Αν V είναι διανυσματικός χώρος πάνω από σώμα $\mathbb{F}$ και v, v' στοιχεία του V δείξτε ότι $v \otimes v' = v' \otimes v$ στο $V \otimes_F V$ αν και μόνο αν $v = rv'$ με $r \in \mathbb{F}$.
5. Έστω I κύριο ιδεώδες της ακεραίας περιοχής R . Δείξτε ότι το R -module $I \otimes_R I$ δεν έχει μη μηδενικά torsion στοιχεία (δηλ. αν $rm = 0$ με $r \in R$ και $m \in I \otimes_R I$ τότε $r = 0$).
6. Έστω $I = (2, x)$ το ιδεώδες του δακτυλίου $R = \mathbb{Z}[x]$ που παράγεται από τα 2 και x . Δείξτε ότι το στοιχείο $2 \otimes x - x \otimes 2$ του R -module $I \otimes_R I$ είναι torsion (μηδενίζεται και από το 2 και από το x). Δείξτε επίσης ότι το R -submodule του $I \otimes_R I$ που παράγεται από το $2 \otimes x - x \otimes 2$ είναι ισόμορφο με το R/I .