Μεταπτυχιακή Άλγεβρα 1,
Εαρινό 2017,
Φυλλάδιο 2

Παράδοση 23/2.

1. 1) Δείξτε ότι $Inn(G) \trianglelefteq Aut(G)$ για κάθε ομάδα G.
2) Δείξτε ότι $S_n \cong \mathrm{Inn}(S_n)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

2. Δείξτε ότι αν η G περιέχει στοιχείο g που έχει ακριβώς δύο συζυγή στοιχεία τότε η G περιέχει γνήσια κανονική μη τετριμμένη υποομάδα N.

3. Αν $H \leq G$ δείξτε ότι $N_G(H)/C_G(H)$ είναι ισόμορφη με μία υποομάδα της $Aut(H)$.

4. Έστω C κυκλική τάξης n. Δείξτε ότι $\mathrm{Aut}(C)$ είναι αβελιανή τάξης $\phi(n)$. Είναι για C κυκλική η $\mathrm{Aut}(C)$ πάντα κυκλική;

5. Έστω $N \trianglelefteq G$. Δείξτε ότι αν N και G/N είναι πεπερασμένα παραγόμενες ομάδες τότε και η G είναι.

6. 1) Δείξτε ότι κάθε πεπερασμένη παραγόμενη υποομάδα της προσθετικής ομάδας $\mathbb{Q}$ είναι κυκλική. Συμπεράνετε ότι η $\mathbb{Q}$ δεν είναι πεπερασμένα παραγόμενη.
2) Δώστε μια γνήσια υποομάδα της $\mathbb{Q}$ που να μην είναι κυκλική.

7. Έστω $H, K \leq G$. Γράφουμε $[H, K]$ για να συμβολίσουμε την υποομάδα της G που παράγεται από όλα τα $[h, k]$ με $h \in H$ και $k \in K$. Δείξτε τα επόμενα:
1) $H \subseteq C_G(K)$ ανν $[H, K] = 1$
2) $H \subseteq N_G(K)$ ανν $[H, K] \subseteq K$
3) Αν $H, K \trianglelefteq G$ και $H \cap K = 1$ τότε $H \subseteq C_G(K)$.

8. Έστω H, K υποομάδες με πεπερασμένο δείκτη σε ομάδα G (η οποία μπορεί να είναι άπειρης τάξης). Αν $|G : H| = m$ και $|G : K| = n$ δείξτε ότι ε.κ.π.$(m, n) \leq |G : H \cap K| \leq mn$. Συμπεράνετε ότι αν m, n είναι μεταξύ τους πρώτοι τότε $G = HK$.

9. Αν $H \trianglelefteq G$ με $|G : H| = p$ πρώτος, δείξτε ότι για κάθε $K \leq G$ είτε $K \leq H$ ή $G = HK$ και $|K : K \cap H| = p$.