

Μεταπτυχιακή Άλγεβρα 1, Εαρινό 2017,  
Φυλλάδιο 3

1. Έστω ότι  $G$  δρα στο σύνολο  $A$  και έστω  $a, b \in A$  που ανήκουν στην ίδια τροχιά. Δείξτε ότι οι αντίστοιχοι stabilizers  $G_a, G_b$  των στοιχείων είναι συζυγείς ομάδες. Συμπεράνετε ότι αν η  $G$  δρα transitively στο  $A$  τότε ο πυρήνας της δράσης ισούται με  $\bigcap_{g \in G} gG_ag^{-1}$ . Συμπεράνετε επίσης ότι αν η  $G$  είναι αβελιανή ομάδα που δρα transitively και faithfully στο  $A$  τότε  $|G| = |A|$ .
2. Αν  $G$  πεπερασμένη ομάδα με την εξής ιδιότητα:  $\forall x, y \in G \setminus \{1\}$  τα  $x, y$  είναι συζυγή στοιχεία. Τι μπορείτε να πείτε για την τάξη της  $G$ ;
3. Αν  $|G| = 2k$  και  $k$  περιττός, δείξτε ότι η  $G$  έχει υποομάδα με δείκτη 2 (και άρα κανονική). Υποδ. Δουλέψτε με την regular δράση της  $G$  στην  $G$ . Δείτε ότι αν  $f : G \rightarrow S_{|G|}$  ο ομομορφισμός που αυτή η δράση επάγει και αν  $x \in G$  έχει τάξη 2, τότε  $f(x)$  είναι γινόμενο  $k$  αντιμεταθέσεων στην  $S_{2k}$ .
4. Αν  $G$  ομάδα περιττής τάξης, δείξτε ότι δεν υπάρχει  $x \in G \setminus \{1\}$  ώστε  $x$  και  $x^{-1}$  να είναι συζυγή.
5. Έστω  $G$  πεπερασμένη ομάδα. Δείξτε ότι η πιθανότητα δύο στοιχεία της  $G$  να μετατίθενται είναι  $k/|G|$ , όπου  $k$  είναι το πλήθος των κλάσεων συζυγίας της  $G$ .
6. Έστω  $D_p$  η ομάδα συμμετριών κανονικού  $p$ -γωνου, όπου  $p$  είναι περιττός πρώτος. Χρωματίζουμε τις κορυφές του  $p$ -γωνου και έχουμε στην διάθεσή μας  $n$  χρώματα. Βρείτε τους διαφορετικούς χρωματισμούς που έχουμε, αν θεωρούμε ισοδύναμα δύο χρωματισμένα  $p$ -γωνα αν το ένα συμπίπτει με το άλλο μέσω της δράσης της  $D_p$ . Χρησιμοποιώντας αυτό που βρήκατε δείξτε το μικρό θεώρημα του Fermat.
7. Έστω  $P \in \text{Syl}_p(G)$  και  $H \leq G$  με  $N_G(P) \leq H$ . Δείξτε ότι  $N_G(H) = H$ .
8. Έστω  $G$  πεπερασμένη ομάδα και  $N \trianglelefteq G$ ,  $P \in \text{Syl}_p(G)$ . Αν  $p$  διαιρεί τις τάξεις  $|N|$  και  $|G/N|$  δείξτε ότι  $P \cap N \in \text{Syl}_p(N)$  και  $PN/N \in \text{Syl}_p(G/N)$ .