Μεταπτυχιακή Άλγεβρα 1, Εαρινό 2017,
Φυλλάδιο 6

1. Έστω R δακτύλιος με 1_R και $r^2 = r$ για κάθε $r \in R$ (ο R τοτε ονομάζεται Boolean). Δείξτε ότι είναι μεταθετικός και ισχύει $r + r = 0$ για $r \in \mathbb{R}$.

2. Έστω $f : R \to S$ ομομορφισμός δακτυλίων:
α) Δείξτε ότι αν $f(1_R) \neq 1_S$ τότε $f(1_R)$ είναι μηδενοδιαιρέτης του S. Συμπεράνετε ότι αν ο S είναι ακέραια περιοχή τότε για κάθε $f : R \to S$ ομομορφισμό δακτυλίων ισχύει $f(1_R) = 1_S$.
β) Δείξτε ότι αν $f(1_R) = 1_S$ τότε για κάθε $u \in U(R)$ ισχύει ότι $f(u) \in U(S)$ (και $f(u^{-1}) = f(u)^{-1}$).

3. Δείξτε ότι ο $M_2(\mathbb{R})$ περιέχει υποδακτύλιο ισόμορφο με το $\mathbb{C}$.

4. Βρείτε όλους τους ομομορφισμούς δακτυλίων $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{30}$.

5. (2μον.) Έστω R δακτύλιος με 1_R και έστω $I \subseteq R$ το μοναδικό μέγιστο δεξί ιδεώδες του R.
α) Δείξτε ότι I είναι ιδεώδες.
β) Δείξτε ότι κάθε στοιχείο $a \in R - I$ είναι αντιστρέψιμο.
γ) Δείξτε ότι I είναι το μοναδικό μέγιστο αριστερό ιδεώδες του R.
(Δακτύλιοι που ικανοποιούν τις υποθεσεις αυτού του προβλήματος ονομάζονται local).

6. 1)Έστω R δακτύλιος με 1_R και I το σύνολο των μη αντιστρέψιμων στοιχείων του R. Αν $(I, +)$ είναι προσθετική υποομάδα του $(R, +)$, δείξτε ότι I είναι ιδεώδες του R και άρα ο R είναι local
2) Έστω p πρώτος. Ορίζουμε

$$R = \{m/n \in \mathbb{Q} \mid m, n \in Z \text{ και } p \nmid n\}.$$

Δείξτε ότι ο R είναι local υποδακτύλιος του Q.

7. (2μον.) Έστω R δακτύλιος με 1_R, ένα στοιχείο $r \in R$ λέγεται nilpotent αν $r^n = 0$ για κάποιο ακέραιο $n = 1, 2, \ldots$.
α) Δείξτε ότι αν r είναι nilpotent τότε $1 - r$ είναι αντιστρέψιμο στον R.
β) Δείξτε ότι αν R μεταθετικός τότε το σύνολο $N(R)$ των nilpotent στοιχείων αποτελεί ιδεώδες του R (το οποίο ονομάζεται nilradical). Δώστε παράδειγμα που αυτό να μην ισχύει αν ο δακτύλιος δεν είναι μεταθετικός.
γ) Δείξτε ότι $N(\mathbb{Z}_m) = 0$ αν και μόνο αν m δεν διαιρείται από το τετράγωνο κανενός πρώτου.

8.Έστω R μεταθετικός δακτύλιος με 1_R, και $N(R)$ το nilradical του R. Δείξτε ότι τα nilpotent στοιχεία του $R/N(R)$ είναι μόνο το 0. Δηλαδή ότι $N(R/N(R)) = 0$.