Μεταπτυχιακή Άλγεβρα 1, Εαρινό 2017
Φυλλάδιο 7

1. Αν R ο δακτύλιος των συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$ και $I = \{f \in R \mid f(1/3) = f(1/2) = 0\}$ δείξτε ότι I είναι ιδεώδες του R αλλά όχι πρώτο.

2. Δείξτε ότι τα ιδεώδη $< x >$ και $< 2 >$ είναι πρώτα ιδεώδη του δακτυλίου $\mathbb{Z}[x]$ αλλά όχι μέγιστα.

3. Αν F σώμα και $F[[x]]$ ο δακτυλιος των δυναμοσειρών πάνω από το F, δείξτε ότι τώρα το ιδεώδες $< x >$ είναι μέγιστο. (Συγκρίνετε με την παραπάνω άσκηση). Μάλιστα $< x >$ είναι το μοναδικό μέγιστο ιδεώδες του $F[[x]]$ και άρα ο $F[[x]]$ είναι local.

4.Αν R μεταθετικός δακτύλιος και I, J, P ιδεώδη του R με P πρώτο ώστε $P \supseteq I \cap J$. Δείξτε ότι είτε το I είτε το J ανήκει στο P.

5. Αν $R = \mathbb{Z}_2[x]$ και $\bar{R} = R/ < x^2 + x + 1 >$ δείξτε ότι $\bar{R}$ είναι σώμα με 4 στοιχεία.

6. Αν R πεπερασμένος μεταθετικός δακτύλιος με 1, δείξτε ότι κάθε πρώτο ιδεώδες του R είναι και μέγιστο.

7. Δείξτε ότι αν P πρώτο ιδεώδες σε μεταθετικό δακτύλιο R τότε περιέχει κάθε nilpotent στοιχείο του R. Συμπεράνετε ότι το nilradical $N(R)$ του R περιέχεται στην τομή όλων των πρώτων ιδεωδών του R. (Όπως θα δούμε είναι ακριβώς ίσο με αυτή την τομή.)

8. Αν I ιδεώδες του μεταθετικού δακτυλίου R ορίζουμε

$$\mathrm{rad}(I) = \{r \in R \mid r^n \in I \text{ με } n \in \mathbb{Z}^*\},$$

που ονομάζεται radical του I.
1) Δείξτε ότι $\mathrm{rad}(I)$ είναι ιδεώδες του R και ότι $rad(I)/I = N(R/I)$.
2) Δείξτε ότι κάθε πρώτο ιδεώδες P του R ικανοποιεί $\mathrm{rad}(P) = P$.

9. Έστω R μία U.F.D.και $0 \neq d \in R$. Δείξτε ότι υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος διαφορετικά κύρια ιδεώδη που περιέχουν το ιδεώδες (d).