Μεταπτυχιακή Άλγεβρα 1, Εαρινό 1017
Φυλλάδιο 8

Παραδίνετε τις 5 πρώτες ασκήσεις μέχρι 6/4

1. Έστω R μία P.I.D.
1) Αν A ένα μη κενό υποσύνολο του R, κοιτάμε το ιδεώδες $< A >$ που παράγεται από το σύνολο A.(Δηλ.$< A >= \{\sum_{i=1}^{k} r_i a_i \mid ar_i \in R, a_i \in A, k \in N\}$). Δείξτε ότι d είναι ένας μέγιστος κοινός διαιρέτης του A αν και μόνο αν $< A >=< d >$
2) Αν $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ πεπερασμένο υποσύνολο του R, δείξτε ότι m είναι ένα ελάχιστο κοινό πολ/σιο του B αν και μόνο αν $< m >= \cap_{i=1}^{k} < b_i >$.

2. 1) Δείξτε ότι ο δακτύλιος$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ των ακεραίων του Gauss είναι ευκλείδεια περιοχή χρησιμοποιώντας την συνάρτηση στάθμης $f : \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ που ορίζεται σαν $f(a + bi) = a^2 + b^2$.
2) Αν $x = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$, δείξτε ότι αν $f(x)$ είναι πρώτος στο $\mathbb{Z}$ τότε x είναι πρώτο στοιχείο της ευκλείδειας περιοχής $\mathbb{Z}[i]$.
3) Βρείτε στην $\mathbb{Z}[i]$ τον μεγιστο κοινό διαιρέτη και το ελάχιστο κοινό πολ/σιο των στοιχείων $11 + 3i$, $8 - i$.
4) Βρείτε τα αντιστρέψιμα στοιχεία (δηλ. το σύνολο $U(\mathbb{Z}[i])$) του $\mathbb{Z}[i]$.

3. Έστω $R = \mathbb{Z}[\sqrt{10}] = \{a + b\sqrt{10} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Δείξτε:
1) Η απεικόνιση $N : R \to \mathbb{Z}$ που δίδεται σαν $N(a+b\sqrt{10}) = (a+b\sqrt{10})(a-b\sqrt{10}) = a^2 - 10b^2$ ικανοποιεί $N(uv) = N(u)N(v)$για κάθε $u, v \in R$ και $N(u) = 0$ αν και μόνο αν $u = 0$.
2) u είναι αντιστρέψιμο στοιχείο του R αν και μόνο αν $N(u) = 1$ ή $N(u) = -1$.
3) $2, 3, 4 + \sqrt{10}, 4 - \sqrt{10}$ είναι ανάγωγα στοιχεία του R
4) $2, 3, 4 + \sqrt{10}, 4 - \sqrt{10}$ δεν είναι πρώτα στοιχεία του R
Τι συμπέρασμα βγάζετε για την R;

4. Αν R μία P.I.D και S μία ακέραια περιοχή που δεν είναι σώμα, δείξτε ότι αν $f : R \to S$ είναι επιμορφισμός δακτυλίων τότε είναι ισομορφισμός.

5. Μία Artinian ακέραια περιοχή είναι σώμα. (Υποδ. $(a) \supset (a^2) \cdots$.)

6. Έστω R μία P.I.D.
1) Δείξτε ότι κάθε γνήσιο ιδεώδες γράφεται σαν γινόμενο $P_1 P_2 \cdots P_k$ από maximal ιδεώδη και αυτή η γραφή είναι μοναδική (modulo τη σειρά).
2) Ένα ιδεώδες Q ονομάζεται primary αν όποτε $ab \in Q$ είτε $a \in Q$ ή $b^n \in Q$ για κάποιο φυσικό n. Δείξτε ότι Q ειναι primary αν και μόνο αν υπάρχει φυσικός n ώστε $Q =< p^n >$ όπου $p \in R$ είναι πρώτο (=ανάγωγο) στοιχείο ή $p = 0$.
3) Αν $P_1, P_2, \dots, P_k$ είναι primary ιδεώδη με $P_i =< p_i^{n_i} >$ όπου p_i είναι διαφορετικά πρώτα στοιχεία τότε $P_1 P_2 \cdots P_k = P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_k$.
4) Δείξτε ότι κάθε γνήσιο ιδεώδες γράφεται σαν τομή πεπερασμένου πλήθους από primary ιδεώδη και αυτή η γραφή είναι μοναδική (modulo τη σειρά).

7. Αν R είναι Noetherian δακτύλιος τότε κάθε $f : R \to R$ που είναι επιμορφισμός δακτυλίων είναι ισομορφισμός.(Υποδ. $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2) \subset \cdots$.)