Μεταπτυχιακή Άλγεβρα 1, Εαρινό 1017
Φυλλάδιο 9

1. Σωστό η Λάθος (Δώστε απόδειξη ή αντιπαράδειγμα). Κάποια από τα παρακάτω έχουν γίνει στην τάξη. Για αυτά δώστε μόνο αναφορά. Έστω R δακτύλιος, S υποδακτύλιος και I ιδεώδες του.
α) Αν R είναι Noetherian τότε και ο S είναι.
β) Αν R είναι Noetherian τότε και ο R/I είναι.
γ) Αν R είναι Artinian τότε και ο S είναι.
δ) Αν R είναι Artinian τότε και ο R/I είναι.
ε) Αν R είναι P.I.D. τότε και ο S είναι.
ζ) Αν R είναι P.I.D. τότε και ο R/I είναι.
η) Αν R είναι U.F.D. τότε και ο S είναι.
ϑ) Αν R είναι U.F.D. τότε και ο R/I είναι.
ι) Αν R είναι ευκλείδια περιοχή τότε και ο S είναι.

2. Υπολογίστε το πηλίκο $\mathbb{Z}[\sqrt{-n}]/ < \sqrt{-n} >$.

3. Έστω n θετικός ακέραιος και $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$.
1) Αν n δεν είναι τέλειο τετράγωνο δείξτε ότι το 2 δεν είναι πρώτο στοιχείο του R $(2 \mid n^2 - n.....)$
2) Αν $-n \leq -3$ δείξτε ότι το 2 είναι ανάγωγο στοιχείο του R. Τι συμπεράσματα βγάζετε για τον R σε αυτή την περίπτωση; (Είναι Noetherian; U.F.D.; P.I.D.; ευκλείδια περιοχή;)

4. Έστω τώρα $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-n}]$ με $-n \leq -3$ και n ακέραιος ελεύθερος τετραγώνων. Δείξτε ότι $\sqrt{-n}$, $1 + \sqrt{-n}$ είναι ανάγωγα στοιχεία. Κατασκευάστε ιδεώδες του R που να μην είναι κύριο.

5. Έστω R ακεραία περιοχή και F το σώμα πηλίκων της. Θεωρούμε επίσης h ένα μονομορφισμό δακτυλίων από το R σε σώμα L. Δείξτε ότι ο h επεκετείνεται μοναδικά σε ένα μονομορφισμό από το F στο L.
Δείτε ότι αν h δεν είναι μονομορφισμός το παραπάνω δεν ισχύει(Για παράδειγμα πάρτε $R = \mathbb{Z}$ και $F = \mathbb{Q}$ το σώμα πηλίκων του.....)

6. Υπολογίστε τα ιδεώδη του δακτυλίου $\mathbb{Z}[x]/(2, x^3 + 1)$.

7. Δείξτε ότι το ιδεώδες που παράγεται από το 7 και το $x^2 + x + 1$ δεν είναι maximal στον $\mathbb{Z}[x]$.

8. Δείξτε ότι $(x^4 + 1)$ δεν είναι maximal στο $\mathbb{Z}_2[x]$, $\mathbb{Z}_5[x], \mathbb{Z}_7[x], \mathbb{Z}_{11}[x]$.
(Γενικότερα ισχύει ότι το $(x^4 + 1)$ δεν είναι maximal στο $\mathbb{Z}_p[x]$, για κάθε πρώτο p. Δείτε το αν ϑέλετε, δεν χρειάζεται να το παραδώσετε.)

9. Χρησιμοποιήστε το κριτήριο του Eisenstein για να δείξετε ότι το πολυώνυμο $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ του $\mathbb{C}[x, y]$ είναι ανάγωγο στο $\mathbb{C}$. (Υπ. $f(x, y) = x^2 + (y^2 + 1)....$)

10. 1) Αν $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0 \in R[x]$ είναι μηδενοδιαιρέτης του $R[x]$ τότε υπάρχει $b \in R$ ώστε $ba_n = ba_{n-1} = \cdots = ba_0 = 0$.
2)* Δείξτε ότι $f(x) \in U(R[x])$ αν και μονο αν $a_0 \in U(R)$ και a_i είναι μηδενοδύναμα στοιχεία του R για κάθε $i = 1, \ldots n$.

11. * Έστω R μία ακέραια περιοχή. Δείξτε ότι αν κάθε πρώτο ιδεώδες της είναι κύριο τότε η R είναι ακέραια περιοχή κυρίων ιδεωδών δηλ. P.I.D. Υπόδειξη: Μιμηθείτε την απόδειξη του Θεωρήματος του Cohen.